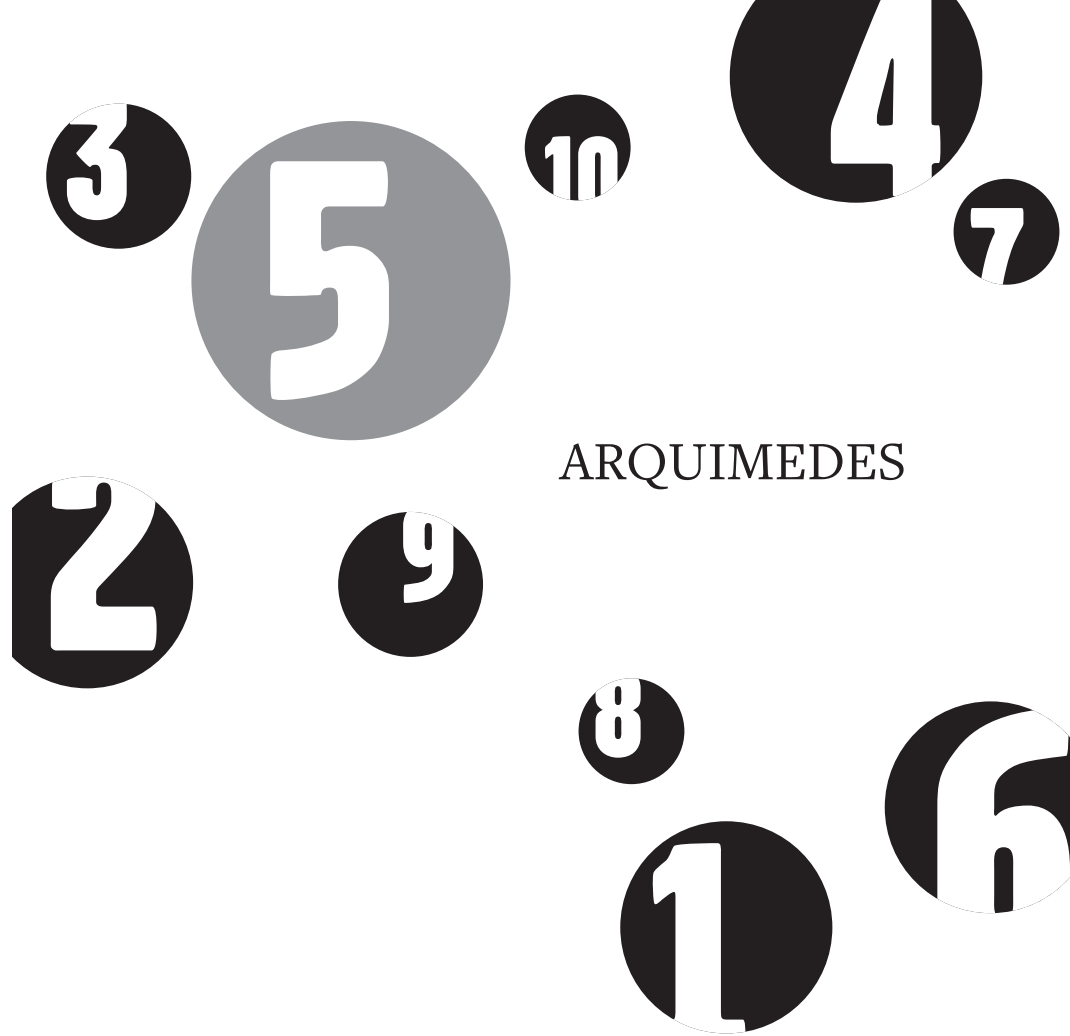


# Arquimedes

**Biografia (Inglaterra, séc. XX-XXI).**

Matemático polivalente e de imaginação ilimitada fez contribuições nas mais diversas áreas da Matemática.

Foi o criador da *Teoria de Jogos Combinatórios* que, para além de permitir compreender muitos jogos, está relacionada com os mais fundamentais princípios da Matemática.



ARQUIMEDES

## *10 livros, 10 matemáticos, 10 puzzles para aprender e divertir-se*

FIBONACCI + MISSING SQUARE (12/07/07)  
PITÁGORAS + PENTALFA (19/07/07)  
JOHN CONWAY + OURI (26/07/07)  
LEIBNIZ + GO 9x9 (02/08/07)  
MANDELBROT + TORRES DE HANÓI (09/08/07)  
ARQUIMEDES + STOMACHION (16/08/07)  
PACIOLI + ANÉIS CHINESES (23/08/07)  
GALOIS + PUZZLE 15 (30/08/07)  
AL-KWARIZMI + ALQUERQUE (06/09/07)  
EULER + HEXÁGONO MÁGICO (13/09/07)

### **FICHA EDITORIAL**

**TÍTULO:** A Geometria + Puzzle Stomachion

**AUTOR:** Carlos Pereira dos Santos, João Pedro Neto, Jorge Nuno Silva

**REVISÃO:** Edimpresa

**IMPRESSÃO E ACABAMENTO:** Norprint **DATA DE IMPRESSÃO:** JUNHO 2007

**DEPÓSITO LEGAL:** 261140/07 **ISBN:** 978-989612270-6

## **JOGAR COM A MATEMÁTICA DOS GÉNIOS**

10 MATEMÁTICOS, 10 QUEBRA-CABEÇAS, 10 LIVROS DE BOLSO. DE TALES A CONWAY, CADA LIVRO CONTÉM INFORMAÇÃO SOBRE A VIDA E OBRA DE UM DOS MAIORES MATEMÁTICOS DA HUMANIDADE, BEM COMO A DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE UM ‘PUZZLE’, QUE É REPRODUZIDO EM MADEIRA E FAZ PARTE DESTA COLECÇÃO.

Veremos que Arquimedes inventou um ‘puzzle’ diabólico há mais de dois mil anos (Stomachion) ou que o Pentagrama, tão respeitado pelos pitagóricos, também era um jogo de tabuleiro. E ficaremos a saber que Conway desenvolveu uma teoria de jogos, que em África se pratica um complexo jogo aritmético há séculos e que o grande filósofo e matemático Leibniz promovia os jogos de tabuleiro asiáticos. Ou ainda que a teoria dos fractais de Mandelbrot está associada também a ‘puzzles’, como as Torres de Hanói, que o popular jogo dos 15 é um exercício de Teoria de Grupos e que Euler, há 300 anos, já estudava o precursor do Sudoku. E para além de falarmos sobre alguns dos jogos que os árabes introduziram na Europa há mais de mil anos, neste primeiro livro aprenderemos também que a célebre sucessão de Fibonacci, que nasceu na resolução de um problema sobre criação de coelhos, é útil na concepção de um quebra-cabeças geométrico. Divirta-se e aprenda matemática com os jogos que desvendam o raciocínio de alguns dos maiores génios da História.

## ARQUIMEDES DE SIRACUSA



ARQUIMEDES, O GEÓMETRA

FIGURA DE 1740 MOSTRANDO ARQUIMEDES A PLANEAR A DEFESA DE SIRACUSA

**A**rquimedes é unanimemente considerado o maior génio científico da Antiguidade. Viveu em Siracusa, uma região da Sicília, no Mediterrâneo, durante a Segunda Guerra Púnica que opôs os cartagineses de Aníbal a Roma. Esta guerra teve proporções enormes e grande influência na ordem mundial da altura.



LOCALIZAÇÃO DE SIRACUSA

Siracusa era aliada de Aníbal e caiu à mercê dos romanos em 212 a.C. Pensa-se que Arquimedes morreu nessa data. Com a moderna ciência associada a datações e a análise de acontecimentos astronómicos, os historiadores conseguem ter frequentemente ideias muito precisas de datas que não se encontram fidedignamente registadas. Reviel Netz, estudioso actual da obra arquimediana, aponta com razão que a ciência moderna ajudada a construir por Arquimedes, aponta um intervalo para a sua própria vida. As enciclopédias costumam escrever Arquimedes (287-212 a.C.).

É claro que a maior preocupação para quem quer entrar na obra de Arquimedes não é o saber com precisão as datas do seu nascimento e morte. É muito mais interessante perceber o que tornou este homem um daqueles génios que só aparece à face da Terra de centenas em centenas de anos. Podemos enumerar algumas características de Arquimedes da seguinte forma:

A) Em contraste com o espírito profundamente geométrico da matemática grega, Arquimedes mostra uma desenvolvidíssima aptidão para cálculos numéricos. Um dos seus grandes feitos consiste na apresentação de um enquadramento para a razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro:  $3 + \frac{1}{6} < \pi < 3 + \frac{1}{10}$ . Voltaremos a este assunto na próxima parte do texto.

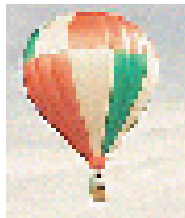
B) Arquimedes tinha um enorme interesse nas aplicações da ciência e, devido a esse facto, é também denominado por muitos como “o Pai da Física”. Enunciou o famoso princípio da hidrostática, também chamado de princípio de Arquimedes:

*Um corpo mergulhado num fluido recebe uma impulsão de baixo para cima igual ao peso do volume de fluido deslocado.*

O leitor não habituado a enunciados científicos poderá ter tendência a saltar este trecho, no entanto pedimos-lhe que não o faça, uma vez que é muito fácil de entender este princípio com casos práticos. Imagine que tem um bocado de madeira que pese exactamente o mesmo que a água correspondente ao espaço que ocupa (situação muito improvável). Nesse caso, em termos práticos tanto faz ter esse bocado dentro de água como a própria água que lá estava. Sendo assim, o bocado de madeira colocado dentro de água ficará suspenso. Sempre que colocamos um objecto na água que pese mais do que água relativa ao espaço que ocupa, este irá ao fundo. Basta, por exemplo, pensar num parafuso. Repare o leitor que os navios pesam toneladas e não vão ao fundo. Isto deve-se ao facto de terem cascos ocos que ocupam muito espaço.

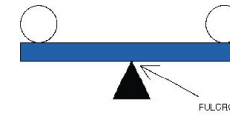
Imagine que a água correspondente ao espaço ocupado por um bocado de madeira pesa 5 Kg e que esse bocado

de madeira pesa 6 Kg. Como, nesta hipótese, o objecto pesa mais do que a água correspondente ao seu espaço ocupado, irá tranquilamente ao fundo. No entanto, o seu peso ficará a ser 1 Kg dentro de água. É isso que o princípio de Arquimedes nos ensina: temos sempre de “descontar” o peso da água correspondente ao espaço ocupado. Um corpo que seja mais leve que o fluido ocupado, irá subir. Este simples princípio tem aplicações práticas conhecidas de todos: barcos, submarinos, balões, etc. Quando um submarino quer descer, enche-se de água, fica a pesar mais do que a água relativa ao seu espaço ocupado e desce. Se quiser subir, deita a água fora, ficando oco e leve e, consequentemente, sobe. Um balão, se quiser subir, aquece o ar do seu interior, o que origina a sua dilatação e o torna mais leve do que o ar exterior. Sobe, sobe, balão sobe...

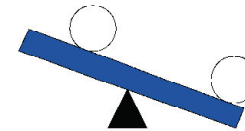


Conta a lenda que Arquimedes estaria a tomar banho quando teve a percepção do comportamento dos corpos nos fluidos e exclamou *eureka, eureka!*

Outro princípio de grande aplicação prática enunciado por Arquimedes é o princípio da alavanca. Todos nós temos uma ideia visual do que é uma balança de braços em equilíbrio. Na figura seguinte temos dois pesos iguais que estão a igual distância ao fulcro.



Qualquer criança habituada a brincar no jardim sabe que se se afastar do fulcro, “ganha vantagem” e dá-se um desequilíbrio.



O que Arquimedes fez foi descrever completamente o mecanismo da alavanca através de uma relação matemática. Podemos ler em qualquer compêndio actual de Física:

*Uma alavanca está em equilíbrio quando os produtos dos pesos pelas medidas dos comprimentos dos braços respectivos são iguais.*



Isto quer dizer que se tivermos um corpo de um lado pesando o dobro do corpo do outro lado, este facto tem de ser compensado colocando-o a uma distância ao fulcro que seja metade da distância do seu “corpo adversário”.

Diz-se que Arquimedes mostrou na prática a eficácia da sua alavanca fazendo deslizar um navio do Rei Herão II para a água. Terá dito então “Dêem-me um ponto de apoio e levantarei o Mundo!”.

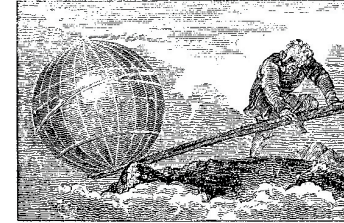


FIGURA DA MECHANIC'S MAGAZINE, 1824

**A**rquimedes também introduziu o conceito importantíssimo de centro de gravidade. Físicos muito posteriores a Arquimedes, ao pensar no estudo dos movimentos dos corpos celestes sob o efeito da gravidade, reduziram no seu pensamento esses mesmos corpos a pontos. No entanto, planetas como a Terra e a Lua têm obviamente infinitos pontos, cada qual influenciado pela gravidade de maneira diferente. A chave para a simplificação consiste em considerar um ponto “eleito” que seja uma espécie de “média” de todos. Por exemplo, uma pessoa que não perceba nada de ciência, aceita intuitivamente que o centro de gravidade de uma esfera seja o centro dessa esfera. Para objectos que não

apresentem a simetria que a esfera apresenta o assunto já não é tão fácil, mas foi magnificamente tratado por Arquimedes em alguns dos seus tratados.

Poderiam ser dados muitos outros exemplos relativos a este apurado sentido de Arquimedes para as aplicações práticas como o famoso parafuso para elevação de líquidos, construção de espelhos para incendiar barcos inimigos na guerra contra os romanos, cálculos relativos a máquinas de guerra como catapultas, etc, no entanto, este texto é pequeno demais para dar uma pequena ideia da vastidão destes exemplos.



FOTO DE UM PARAFUSO DE ARQUIMEDES EXISTENTE NO PARQUE DAS NAÇÕES EM LISBOA.



OBRA ALUSIVA AOS ESPELHOS DE ARQUIMEDES DEFENDENDO SIRACUSA DE GIULIO PARIGI (1571-1635), EXPOSTO EM FLORENÇA.

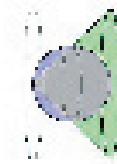
C) A terceira marca essencial de Arquimedes é o facto de ter sido um grande investigador. Por exemplo, Euclides de Alexandria, célebre pelos seus Elementos, sistematizou e organizou o trabalho matemático grego o que é louvável e muitíssimo útil, mas Arquimedes, em todos os seus escritos, traz avanços para o conhecimento científico da época. Arquimedes era um matemático evoluído e escrevia cartas para os maiores sábios matemáticos da altura, totalmente conhecedores da obra de Euclides. Repare-se como este espírito de procura é magnificamente explicitado pelo próprio Arquimedes numa correspondência com Eratóstenes de Alexandria:

*“Arquimedes a Eratóstenes: saudações! Como sei que sois diligente, um excelente professor de filosofia e extremamente interessado em qualquer investigação matemática com que vos deparais, julguei apropriado escrever-vos a apresentar-vos um método especial [...]. Presumo que haja alguns tantos entre as presentes como futuras gerações que, por intermédio do método aqui explicado, possam descobrir outros teoremas a que ainda não tivemos acesso.”*

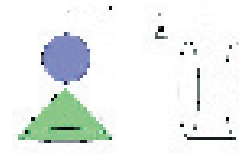


Arquimedes tem uma grande lista de obras riquíssimas tais como Da Esfera e do Cilindro, em que, entre outros resultados, calcula o volume da esfera, Do Equilíbrio dos Planos, em que trata da alavanca, centros de gravidade, etc., Dos Corpos Flutuantes, em que enuncia o princípio fundamental da hidrostática, O Stomachion, em que trata de um puzzle geométrico, entre muitos outros tratados.

Um matemático com alguma experiência que estude a obra de Arquimedes não consegue ficar indiferente ao verificar como tudo se interliga e completa. Arquimedes não tem nenhum problema em misturar conceitos físicos com demonstrações matemáticas obtendo resultados correctos. Por exemplo, quando trata do problema do cálculo do volume da esfera, Arquimedes parte de uma imagem de uma esfera, de um cone, e de um cilindro sobrepostos de forma a que o diâmetro da base do cilindro e do cone tenham medida igual ao dobro do diâmetro da esfera e de forma a que a altura do cilindro e do cone sejam iguais ao diâmetro da esfera:



Em seguida, numa sequência argumentativa que sai fora do âmbito deste texto, Arquimedes mistura conceitos de geometria euclidiana, o conceito de centro de massa e o princípio da alavanca e consegue provar o seguinte equilíbrio:



Usando o princípio da alavanca e o que já era conhecido sobre os volumes do cone e do cilindro, deduziu correctamente a fórmula do volume da esfera

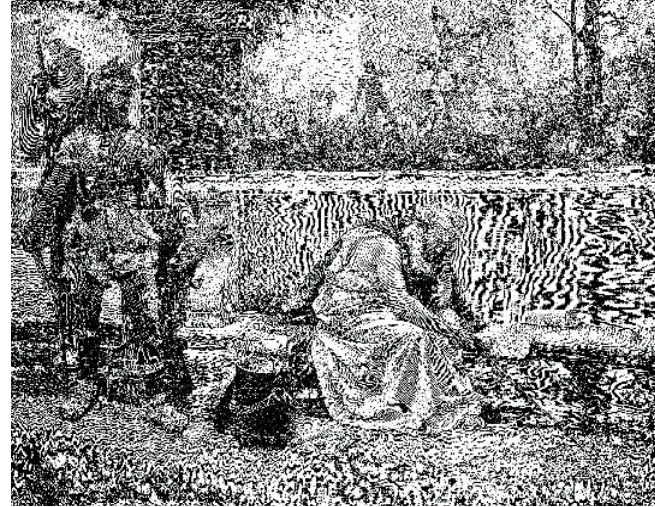
$$\text{Volume da Esfera} = \pi r^2 (\text{raio da esfera})^3.$$

Este é um exemplo paradigmático do estilo de Arquimedes.

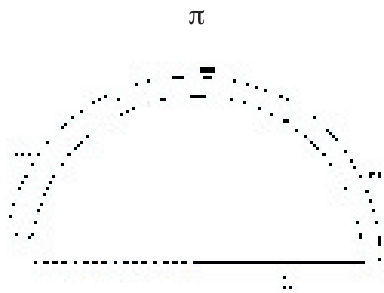
Arquimedes é lendário até na sua morte. O filósofo e prosador Plutarco, que viveu no séc. I d.C., descreve-a da seguinte maneira:

*“Ele estava sozinho, a resolver um qualquer problema com a ajuda de um diagrama, e tendo fixado tanto os seus olhos como os pensamentos no assunto que estudava, não estava a par da incursão dos Romanos ou da tomada da cidade. Subitamente, um soldado acercou-se dele e ordenou-lhe que o acompanhasse até Marcelo. A isto Arquimedes recusou-se até que solucionasse o seu problema e fizesse a demonstração, ao que o soldado se exaltou, desembainhou o gládio e o matou.”*

Independentemente do carácter lendário desta narrativa, a sua interpretação é altamente simbólica. Representa um horrível crime contra a Humanidade e contra a inteligência levado a cabo pela própria Humanidade. Mostra uma incompreensão face ao valor da ciência, simbolicamente expressa pela ignorância do soldado em contraste com uma concepção da vida, privilegiando a cultura, como era a dos gregos.

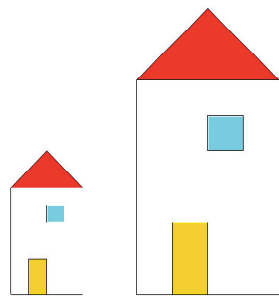


MORTE DE ARQUIMEDES. GUSTAVE COURTOIS  
(1853-1923).



QUANTOS RAIOS “CABEM” NUMA  
SEMI-CIRCUNFERÊNCIA?

Começemos esta secção por observar um desenho representando duas casas, uma ao lado da outra:



Qualquer criança dirá que as casas têm a mesma forma: apenas uma é maior do que a outra. Qualquer ser humano tem a percepção sobre o que são objectos com a mesma forma ainda antes de saber exactamente o que é ter a mesma forma, ou seja, antes de responder rigorosamente à pergunta

*O que têm em comum objectos com a mesma forma?*

No entanto, o conceito de figuras planas com a mesma forma – figuras semelhantes – sempre foi vital para a evolução da matemática. Os gregos dominavam perfeitamente o conceito e usavam recorrentemente semelhanças nas suas demonstrações.

A resposta à questão proposta é simples: figuras semelhantes mantêm as amplitudes angulares e mantêm as proporções. Para se entender bem o que quer isto dizer, veja-se a próxima figura:



Quantos raios “cabem” numa semi-circunferência?

O número que responde a esta pergunta é usualmente designado pela letra grega  $\pi$  (pi) que é proveniente da palavra grega para a perífera ( $\pi$   $\square$   $\square$   $\square$   $\square$   $\square$   $\square$   $\square$   $\square$ ). Repare o leitor que conseguimos explicar o que é o número  $\pi$  sem indicar o seu valor, mas sim através da pergunta fundamental que lhe está por trás.

Se alguém lhe perguntar o que é o número pi, não responda displicentemente que é “3,14”. Em primeiro lugar, veremos que o valor não é exactamente esse. Em segundo lugar, se responder dessa forma não está a dizer nada sobre a natureza desse número:  $\pi$  é a constante de proporcionalidade entre o semi perímetro de uma circunferência e o seu raio, traduz exactamente o “número de raios que cabe numa semi circunferência” e é aproximadamente igual a 3,14 (abordaremos o assunto com mais rigor mais à frente). A resposta “breve” à pergunta inicial seria algo do tipo

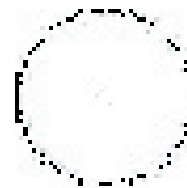
“Cabem” três mais um bocadito...

Posto isto, vamos abordar mais cuidadosamente algumas questões relacionadas com o valor exacto de  $\pi$ . Num número anterior desta colecção, foi tratado o conceito de número irracional: número que não pode ser escrito sob a forma de fracção ( com a, b inteiros). Modernamente sabe-se que o número  $\pi$  é um número irracional, no entanto, uma justificação para tal facto não é fácil de obter e não foi encontrada na Antiguidade. Mas os nossos antepassados não eram de forma nenhuma ignorantes relativamente ao seu valor e conseguiram determinar aproximações muitíssimo boas. Veja-se o seguinte quadro com alguns exemplos:

BÍBLIA, livro de Reis 7:23 “Fez também o mar de fundição; era redondo e media dez côvados duma borda à outra, cinco côvados de altura e trinta de circunferência.”	Utilização de 3 para o valor de $\pi$
EGIPTO ANTIGO Fonte: Papiro de Rhind	Utilização de $\approx 3,1604\dots$ para o valor de $\pi$
ANTIGA BABILÓNIA Fonte: Placas encontradas a 360 Km da Babilónia	Utilização de $3 + \frac{1}{20} = 3,125$ para o valor de $\pi$
ENQUADRAMENTO DE ARQUIMEDES	$3 + \frac{1}{20} < \pi < 3 + \frac{1}{10}$

**O**lhando para o quadro podemos ver um enquadramento feito por Arquimedes para o valor de  $\pi$ . Ao contrário dos outros exemplos, provenientes de regras empíricas, o enquadramento de Arquimedes foi objecto de demonstração. O que Arquimedes fez foi inscrever e circunscrever polígonos regulares numa circunferência de forma a obter em cada passo majoran-

tes e minorantes para  $\pi$ . Para colocar em prática o seu método, Arquimedes utilizou muito boas aproximações para algumas raízes quadradas que foram surgindo e recorreu à Proposição 3 do Livro VI dos Elementos de Euclides para estender o seu método até aos polígonos regulares com 96 lados. Embora não façamos o percurso rigoroso de Arquimedes apresentamos algumas imagens para uma maior compreensão do seu método.

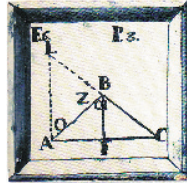
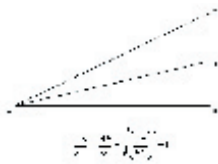


OS DODECÁGONOS INSCRITO E CIRCUNSCRITO JÁ SE “ADAPTAM” BASTANTE À CIRCUNFERÊNCIA.



Imagem relativa à aplicação do método de Arquimedes no momento em que circunscreve um polígono regular de 96 lados obtendo o majorante  $\pi < 3+$ .

O olho humano já não distingue...



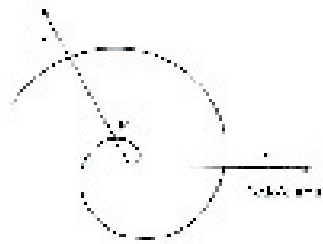
À esquerda: Relação utilizada por Arquimedes na aplicação do método que permite estudar um polígono regular com o dobro do número de lados de outro já estudado.

À direita: Azulejo pertencente à colecção do Museu Nacional de Machado de Castro. O diagrama diz respeito à demonstração da proposição 3 do Livro VI dos Elementos que permitiu a Arquimedes demonstrar a relação à esquerda.

Outro problema que foi tratado pelos gregos é o famoso problema da Quadratura do Círculo. A meta consiste em construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado usando apenas uma régua não graduada, um compasso e um número finito de passos.

Os gregos não foram capazes de fazer a dita construção e, em 1882, Ferdinand Lindemann resolveu o problema pela negativa: demonstrou que tal construção é impossível de se realizar. O leitor poderá estranhar que um problema com solução impossível se considere resolvido, mas de facto um problema só se mantém em aberto quando ainda não se sabe se é possível ou se é impossível obter solução. Esta ideia vem de encontro ao sábio provérbio “o que não tem remédio remediado está”.

Arquimedes conseguiu enfrentar problemas relacionados com o círculo utilizando recursos além da régua e do compasso. É conhecido o traçado de uma curva denominada Espiral de Arquimedes, através da qual conseguiu efectuar uma quadratura do círculo. Esta curva, como é timbre de Arquimedes, é obtida através de um processo físico explicado na figura seguinte:



A SEMI-RECTA  $s$  RODA COM MOVIMENTO UNIFORME;  
 O PONTO  $P$  MOVE-SE SOBRE  $s$  TAMBÉM COM MOVIMENTO UNIFORME;  
 AMBOS OS MOVIMENTOS COMEÇAM NO MESMO INSTANTE;  
 A ESPIRAL DE ARQUIMEDES É O LUGAR GEOMÉTRICO TRAÇADO POR  $P$ .

Em relação à sua espiral, Arquimedes demonstrou uma interessante propriedade envolvendo a circunferência:

Consideremos a posição do ponto  $P$  ao fim de uma volta da semi-recta  $s$ . Consideremos, nesse instante, uma tangente à espiral no ponto  $P$ . Essa tangente vai intersectar a perpendicular à semi-recta  $s$  que passa pela origem  $O$  num certo ponto  $T$ . O comprimento do segmento  $[OT]$  é igual ao perímetro da circunferência de raio  $OP$ .



## CÓDEX C DE ARQUIMEDES PUZZLE STOMACHION



CÓDEX C DE ARQUIMEDES.

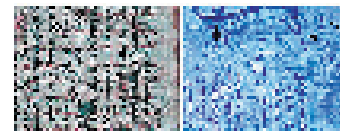


**N**o dia 29 de Outubro de 1998 foi vendido em leilão, em Nova Iorque um manuscrito medieval com o código de venda «Eureka – 9058». Estava chamuscado, com imenso bolor e com um aspecto ilegível. No entanto, Felix Oyens, ao serviço de interposta pessoa, pagou dois milhões de dólares por dita peça. A razão para tal exorbitância residiu no facto de, por baixo das orações cristãs do século XIII, haver palavras provenientes do cérebro do grande matemático Arquimedes de Siracusa.

O livro era só o mais antigo manuscrito existente de Arquimedes, o Códex C, contendo Dos Corpos Flutuantes, Do Método Relativo aos Teoremas Mecânicos e o Stomachion. A pessoa para quem Félix comprou o manuscrito é anónimo, sendo usualmente tratado por Mr. B. Por sorte, tesouro de tal maneira precioso caiu em boas mãos, uma vez que o seu actual dono permitiu e incentivou o seu estudo de forma a todos nós continuarmos a aprender com Arquimedes. Foi criado um projecto de investigação “O Códex de Arquimedes” e modernas técnicas de restauro, utilizando tecnologia de ponta devolveram vida às suas ideias. É de referenciar Reviel Netz, professor de ciência antiga na Universidade de Stanford e actualmente um dos mais reconhecidos especialistas sobre as obras de Arquimedes e William Noel, conservador de manuscritos e livros raros do Walters Art Museum e director do projecto de investigação “O Códex de Arquimedes”.

Ao ser analisado, o objecto comprado pelo misterioso Mr. B, revelou-se, um palimpsesto: um texto rasurado num pergaminho

sobre o qual se escreveu por cima. Palimpsesto deriva da palavra grega  $\pi\alpha\lambda\iota\mu\pi\epsilon\sigma\tau\omicron$  ( $\pi$ -denovo;  $\mu$  riscar). Havendo mais interesse em ler o material original do que as orações escritas por cima, despenderam-se todos esforços para “espreitar” o estava por baixo.



#### DUAS IMAGENS DE PÁGINAS DO CÓDEX C DEPOIS DE TRATADAS E SOB LUZ ESPECIAL.

Foi uma aventura impressionante seguir o rasto da viagem destes escritos, no tempo e no espaço:

I) séc. III a.C., Arquimedes a Eratóstenes: saudações!...

II) No séc. VI, Isidoro de Mileto utilizou os trabalhos de Arquimedes para construir uma cúpula em Constantinopla. Nessa altura, as obras do matemático foram novamente copiadas. No séc. X, numa altura de apogeu do Império Bizantino, as obras foram recopiadas, utilizando espaços entre palavras e minúsculas. Devido a esse facto, e resultando da análise do manuscrito, pensa-se que este terá nascido nesta altura...

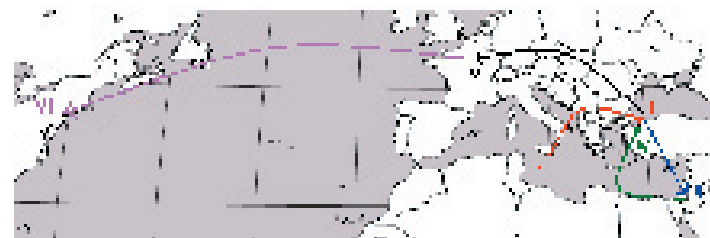
III) Em 1209, Constantinopla foi tomada pelos Cruzados e,

provavelmente o manuscrito terá viajado até ao Médio Oriente. San Sabas, perto de Jerusalém, terá sido a sua “casa” durante séculos. Duas décadas depois, Ioannes Myronas desmontou os fólhos do pergaminho, apagou com ácido as letras, e escreveu por cima um livro de orações.

IV) No séc. XIX a biblioteca de San Sabas fica sob controle de um patriarca de Constantinopla e os livros viajam para Metochion, em Constantinopla. Durante essa estadia, o académico alemão, Tischendorf, como se não bastasse de peripécias, arranca uma página ao manuscrito. O estudioso Papadopoulos fez um estudo dos arquivos do Metochion em 1899. Mais tarde, em 1906, o estudioso dinamarquês Heiberg analisou a fundo o palimpsesto.

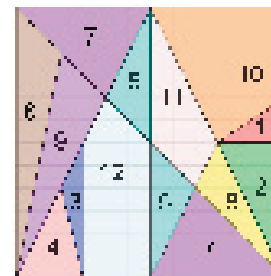
V) Posteriormente, num conflito entre gregos e turcos, o documento desapareceu. Voltou a aparecer nos anos 70, nas mãos de uma família francesa que o comprou em Istambul, na década iniciada em 1920.

VI) Os herdeiros desta valiosíssima obra da humanidade leiloaram-na, em 1998, quando foi comprada por um milionário americano (Mr. B) e depois depositado no Museu Walters de Baltimore. Lá ficará até 2008, ano em que o projecto do “Códex de Arquimedes” será concluído.



### A “ODISSEIA” DO CÓDEX C DE ARQUIMEDES.

Desde há muito que se encontram referências a um jogo da Antiguidade chamado Stomachion. Este jogo é composto por 14 peças, formando um quadrado. No conjunto de 14 peças, há dois pares de peças iguais, pelo que na figura seguinte, os números 5 e 7 se encontram repetidos:



STOMACHION

**M**arius Victorinus (séc. IV) e Atilius Fortunatus (séc. VI) chamaram-lhe *loculus Archimedeus* (caixa de Arquimedes). Outras vezes este jogo foi chamado de *Ostomachion* ou *Syntemachion*. O nome *Stomachion* deriva da palavra grega para estômago ( $\square\square\square\mu\square\square\square\square$ ): talvez por provocar dores de estômago a quem pense muito no assunto. Num manuscrito do poeta e estadista romano Ausonius (séc. IV) o *Stomachion* é comparado a uma forma de poesia. Nesse manuscrito aparece a seguinte arrumação que aparenta ser um elefante:



Muitas outras figuras sugestivas se podem formar com as peças do *Stomachion*.

Embora muito provavelmente Arquimedes não tenha sido o inventor do *Stomachion*, uma dúvida se levantou ao estudar o palimpsesto: O que este puzzle despertou no espírito de Arquimedes. Afinal, o que é o puzzle *Stomachion*?

Depois de traduzir e interpretar o *Códex C*, o investigador Reviel Netz afirma que o que Arquimedes queria não era propriamente fazer figuras de animais, mas sim responder a uma simples pergunta:

De quantas formas diferentes se podem juntar as 14 peças do jogo de maneira a formar um quadrado?

Como veremos, este é um problema complexo de contagem com bastante conteúdo matemático. A procura da resposta a esta pergunta é realmente um caminho difícil e provavelmente desafiou a mente de Arquimedes.

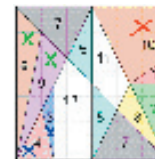
## STOMACHION UM PROBLEMA DE COMBINATÓRIA

Muitas vezes as pessoas dizem “aquele sujeito nem sequer sabe contar” querendo realçar a ignorância de outra pessoa. No entanto, há casos em que a tarefa de contar pode ser bastante difícil, chegando mesmo a ser um problema matemático complexo. Na nossa vida quotidiana deparamo-nos com muita frequência com questões que envolvem contagens: número de chaves diferentes existentes no totoloto, número de jogos diferentes que podem sair num jogo de Sueca, número de matrículas diferentes que podem ser distribuídas pelos automóveis em Portugal, etc. Este tipo de questões é o objecto de um campo da matemática chamado Combinatória.

Os gregos foram fundadores dos mais variados campos da matemática. Podemos mesmo dizer que foram os fundadores de quase todos. No entanto, sempre se pensou que a combinatória fugiu ao seu impressionante leque de criações. Uma das coisas que a análise do palimpsesto veio mostrar é que provavelmente esta ideia está errada. O investigador Reviel Netz, baseado nas traduções do manuscrito, é defensor da tese de que Arquimedes pretendeu encontrar o número de maneiras diferentes de se juntar as 14 peças do Stomachion de forma quadrangular. Naturalmente, uma das primeiras metas que traçou foi calcular efectivamente esse número, usando a ciência moderna. O que é interessante é que tal tarefa é muito difícil ser realizada sem usar a força bruta informática.

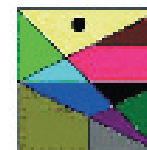
Cientistas de primeira água trabalharam neste problema: Ron Graham e Fan Chung, da Universidade da Califórnia, Persi Diaconis e Susan Holmes da Universidade de Stanford, Bill Cutler, cientista informático de Ilinoís.

A primeira propriedade sobre o puzzle Stomachion que deve ser frisada é a seguinte:



AS PEÇAS 1 E 10, 3 E 4, 6 E 9 TÊM DE ESTAR SEMPRE JUNTAS.

Sendo assim, o Stomachion pode ser encarado como sendo um puzzle com 11 peças. Este puzzle mais pequeno (completamente equivalente ao Stomachion) é denominado Stomach (retiraram-se as 3 últimas letras do nome). Eis uma imagem do Stomach:



Está marcada com uma bolinha uma peça a que chamaremos peça fundamental do Stomach.

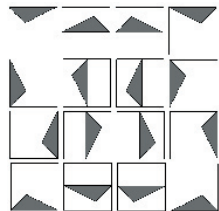
Posto isso, colocou-se o objectivo de encontrar uma estratégia de contagem. Para que o leitor possa entender as ideias que se seguem é importante esclarecer primeiro os conceitos de rotação e de reflexão. Através de uma reflexão, uma imagem é invertida em relação a uma recta, transformando-se numa imagem espelhada. Essa recta que faz de espelho chama-se eixo de simetria.



À ESQUERDA, EXEMPLO SIMPLES DE REFLEXÃO EM TORNO DE UM EIXO.  
 À DIREITA, GRAVURA DE M.C.ESCHER (1898-1972) BASEADA EM REFLEXÕES.

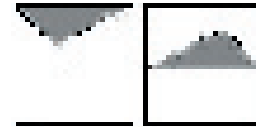
Para se efectuar uma rotação é necessário não um eixo, mas sim um ponto central. Também é necessário definir uma amplitude e um sentido da rotação. A rotação corresponde simplesmente a rodar a figura, essa amplitude, no sentido definido, em torno do ponto central.

Continuando sobre o método de contagem do Stomach, a segunda propriedade importante a ser realçada é a seguinte: em qualquer configuração quadrangular das 11 peças do Stomach, a peça fundamental tem de ocupar uma das seguintes 16 posições:



Paramos aqui para fazer uma observação importante. Um matemático poderia enunciar esta propriedade da seguinte forma muito mais elegante:

“Em qualquer configuração quadrangular a peça fundamental tem de ocupar uma das seguintes 2 posições **a menos de rotação e reflexão**”



Repare-se que as rotações podem ser em torno do ponto central (00, 900, 1800 e 2700) e por cada posição há duas reflexões em torno do eixo central do quadrado. Daí o factor 8 ( $2 \times 8 = 16$ ).

Este pormenor parece irrelevante mas é de suma importância. Uma das maiores artes da combinatoria é a sua organização de pensamento.

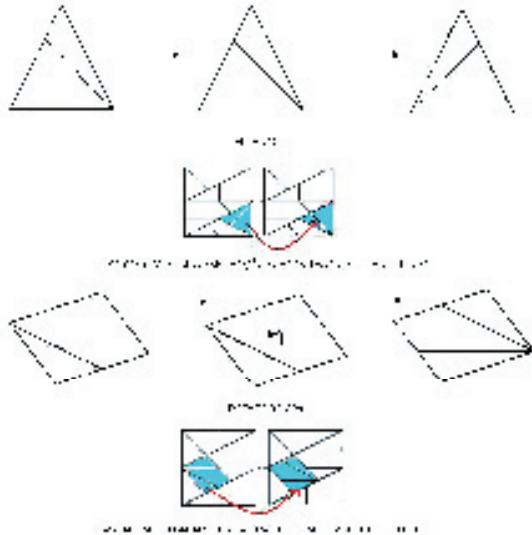
Em seguida, para encontrar um método organizado de contagem, surgiram várias questões muito importantes:

«De uma dada solução será possível obter outras por uma sequência de movimentos?»

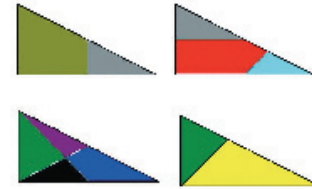
«Será que existem soluções fundamentais a partir das quais seja possível obter todas as outras por sequências de movimentos?»

Estas questões indicaram o caminho para se tratar o problema. Primeiro definiu-se movimento da seguinte forma: Dada uma disposição quadrangular das 11 peças do Stomach, um movimento consiste em reflectir ou rodar um subconjunto de peças mantendo a disposição quadrangular.

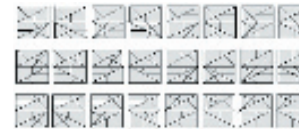
Vejamos dois exemplos de movimentos:



Em seguida, para uma boa organização da contagem, consideraram-se os quatro triângulos a que chamaremos triângulos básicos.



A partir destes, definiram-se as chamadas 24 soluções fundamentais:



Tendo em vista obter soluções a partir das 24 soluções fundamentais, restringiu-se um pouco o conjunto total de movimentos através das seguintes definições:

**Definição de movimento global:** Chamamos movimentos globais aos movimentos que troquem a posição de dois dos triângulos fundamentais, deixando todas as restantes peças imóveis. Um movimento diz-se local, se não for global.

**Definição de movimento legal:** Definimos que só se podem efectuar movimentos que alterem a posição da peça fundamental do Stomach se esses movimentos forem globais e corresponderem a uma troca dos dois triângulos da zona superior do quadrado. Com esta regra, a peça fundamental ficará fixa numa das duas posições que abordámos an-

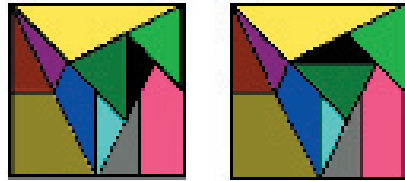
teriormente. São válidos todos os movimentos globais ou simples deste que não infrinjam esta regra.

Posto isto, e com comprovação fora do âmbito deste texto, o Stomach verifica mais duas propriedades:

**Terceira propriedade:** É impossível chegar de uma solução fundamental a outra por meio de movimentos legais sem efectuar pelo menos um movimento global.

**Quarta propriedade:** Só há duas configurações com a peça fundamental na zona superior do quadrado que não podem ser obtidas a partir das soluções fundamentais.

As duas configurações que não provêm de soluções fundamentais.



Tendo em conta as propriedades que sublinhámos, é possível obter uma estratégia completa de contagem. Primeiro, e não sem trabalho, listaram-se todas as posições que se podem obter de cada uma das 24 posições fundamentais através de movimentos locais.

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Soma
Número de Possibilidades	7	7	7	7	10	10	16	18	14	14	18	14	7	7	7	10	10	10	10	14	14	14	14	14	266

A título de exemplo, mostramos o estudo de Chung e Graham relacionado com a posição 7:

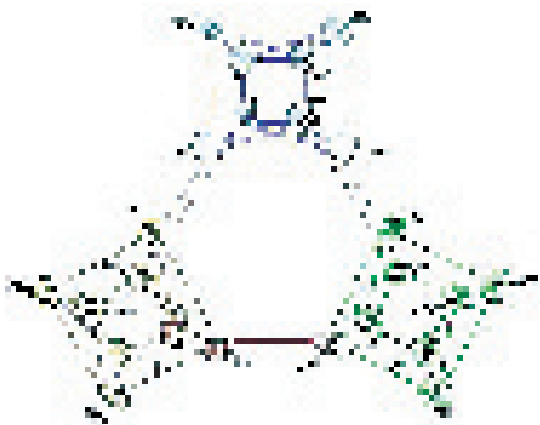


RETIRADO DE [HTTP://WWW.MATH.UCSD.EDU/~FAN/STOMACH/TOUR/](http://www.math.ucsd.edu/~fan/stomach/tour/)  
AS ARESTAS UNINDO POSIÇÕES INDICAM A POSSIBILIDADE DE SE PODER  
PASSAR DE UMA PARA OUTRA ATRAVÉS DE UM MOVIMENTO LOCAL.

A terceira propriedade garante um dos pormenores mais importantes num processo de contagem que é a **não existência de repetição**.

Atendendo à quarta propriedade somou-se ao total de 266 posições obtidas as duas que são independentes ficando com um total de 268 posições.

Estas 268 posições são o “núcleo da contagem”. Não esquecendo que no Stomach há três pares de peças iguais que podem ser trocadas (corresponde a um factor de  $2 \times 2 \times 2 = 8$ ) e não esquecendo as rotações e reflexões (que também correspondem a um factor de 8), para obter o número pretendido, é necessário efectuar a multiplicação  $268 \times 8 \times 8 = 17152$ . Veja-se uma visualização de um grafo proposto por Chung e Graham em que as 24 posições fundamentais estão unidas por arestas (movimentos globais) e em relação a cada uma das 24 existe um mini-grafo correspondente às possibilidades através de movimentos locais.



Não se sabe se Arquimedes chegou ao número correcto, mas a análise do palimpsesto produz a forte convicção de que pelo menos ele andava à sua procura. Repare-se no trecho retirado do seu texto:

*“Portanto, não há um pequeno número de figuras feitas a partir delas, porque é possível rodá-las para outro lugar de uma figura igual e equiangular, transposta para assumir outra posição; e também com duas figuras, consideradas juntas, sendo iguais e similares a uma única figura, e duas figuras consideradas juntas sendo iguais e similares a duas figuras consideradas juntas – então com a transposição, muitas figuras combinadas.”*

Infelizmente não sabemos bem o que Arquimedes tinha em mente quando escreveu esta passagem...

Eis uma lista com as 268 construções do Stomach a menos de simetria, rotação e reflexão:

