# *Leonhard Euler*

**Biografia (Basileia, 1707-1783).**
Euler, o príncipe dos matemáticos, produziu uma obra vastíssima, que se estende ao longo das mais diversas áreas matemáticas, sendo responsável pelo nascimento de várias delas, como a Teoria dos Grafos, deixando também marca indelével na Matemática Recreativa. Trabalhou na sua Suíça natal, bem como em Berlim e em S. Petersburgo.

LEONHARD EULER

# *10 livros, 10 matemáticos, 10 puzzles para aprender e divertir-se*

Fibonacci + Missing Square (12/07/07)
Pitágoras + Pentalfa (19/07/07)
John Conway + Ouri (26/07/07)
Leibniz + GO 9x9 (02/08/07)
Mandelbrot + Torres de Hanói (09/08/07)
Arquimedes + Stomachion (16/08/07)
Pacioli + Anéis Chineses (23/08/07)
Galois + Puzzle 15 (30/08/07)
Al-Kwarizmi + Alquerque (06/09/07)
Euler + Hexágono Mágico (13/09/07)

**FICHA EDITORIAL**
**TÍTULO:** Os qadrados latinos + *Puzzle* Hexágono Mágico
**AUTOR:** Carlos Pereira dos Santos, João Pedro Neto, Jorge Nuno Silva
**GRAFISMO:** João Carlos Mendes e Diana Chaves
**REVISÃO:** Edimpresa
**IMPRESSÃO E ACABAMENTO:** Norprint **DATA DE IMPRESSÃO:** AGOSTO 2007
**DEPÓSITO LEGAL:** 261140/07 **ISBN:** 978–989612270–6



# JOGAR COM A MATEMÁTICA DOS GÉNIOS

10 matemáticos, 10 quebra-cabeças, 10 livros de bolso. De Tales a Conway, cada livro contém informação sobre a vida e obra de um dos maiores matemáticos da humanidade, bem como a descrição e análise de um *puzzle*, que é reproduzido em madeira e faz parte desta colecção.

Veremos que Arquimedes inventou um *puzzle* diabólico há mais de dois mil anos *(Stomachion)* ou que o *Pentagrama*, tão respeitado pelos pitagóricos, também era um jogo de tabuleiro. E ficaremos a saber que Conway desenvolveu uma teoria de jogos, que em África se pratica um complexo jogo aritmético há séculos e que o grande filósofo e matemático Leibniz promovia os jogos de tabuleiro asiáticos. Ou, ainda, que a teoria dos fractais de Mandelbrot está associada também a *puzzles*, como as *Torres de Hanói*, que o popular jogo dos 15 é um exercício de Teoria de Grupos e que Euler, há 300 anos, já estudava o percursor do *Sudoku*. E, para além de falarmos sobre alguns dos jogos que os árabes introduziram na Europa há mais de mil anos, neste primeiro livro aprenderemos também que a célebre sucessão de Fibonacci, que nasceu na resolução de um problema sobre criação de coelhos, é útil na concepção de um quebra-cabeças geométrico.
Divirta-se e aprenda matemática com os jogos que desvendam o raciocínio de alguns dos maiores génios da História.

Leonhard Euler (1707-1783)



Euler (diz-se Óiler) nasceu em Basileia em 1707, sendo o mais velho dos quatro filhos de Paulus Euler e Margaretha Brucker. Cedo se mudou para um ambiente rural perto da sua cidade natal.

Basileia hoje

O seu pai, sacerdote calvinista, que lhe reservou um futuro religioso, ensinou-lhe em casa as primeiras letras. A sua aptidão para a Matemática manifestou-se desde esta altura.

Aos oito anos mudou-se para Basileia para prosseguir os estudos. Como estes se limitavam às línguas clássicas, Paulus Euler providenciou um tutor para o seu filho, um amante da Matemática, Burkhardt.

Em 1720, com 13 anos de idade, inscreve-se na Universidade de Basileia, na Faculdade de Filosofia, para dar seguimento aos estudos religiosos tão do agrado de seu pai. Aqui estudava a sua matéria preferida, a Matemática, mas também Teologia, Medicina e outras disciplinas.

Universidade de Basileia, fundada em 1459

Na universidade, Euler foi aluno do maior matemático de então, Johann Bernoulli (1667-1748). Falar de matemáticos de nome Bernoulli é, por vezes, confuso, porque se trata de uma família de diversos matemáticos de renome, constituindo um caso raríssimo de vocação extrema partilhada por familiares. Johann Bernoulli aconselhou Euler em matérias relacionadas com Matemática. Ao princípio, sem reparar no enorme talento do pupilo, mas mais tarde referiu-se a ele como o príncipe dos matemáticos.

Johann Bernoulli (1667-1748)

Em 1772, obteve o *primam lauream*, o seu primeiro grau académico, com uma tese intitulada *De Temperantia* (*Temperança*).

Em 1723 terminou a graduação em Filosofia, obtendo o grau de Magister, dissertando em latim sobre os trabalhos de Descartes (1596 – 1650) e Newton (1643 – 1727).

Tendo-se inscrito no curso de Teologia, mas preferindo a Matemática, teve a anuência de seu pai para mudar de objectivos académicos. Assim, em 1726, participa no concurso da Academia de Paris, que costumava propor problemas e premiar as melhores soluções. A questão que abordou relacionava-se com a colocação de mastros num navio. Embora só tenha obtido uma menção honrosa, perdendo o primeiro prémio para um engenheiro francês, o seu espírito matemático está bem patente nas palavras finais da sua candidatura: "Não senti necessidade de testar experimentalmente a solução que proponho, porque esta se baseia nos mais sólidos princípios da Mecânica, o que leva a que nenhuma questão se possa levantar sobre o que sucederá na prática".

Os filhos mais velhos de Johann Bernoulli haviam partido para S. Petersburgo, para ingressarem na respectiva Academia. Na sequência dos seus bons ofícios, Euler também foi convidado e parte de Basileia em 1727.



Academia de S. Petersburgo, fundada em 1724

Euler começou por fazer uma comunicação sobre hidráulica, mas muitas outras se seguiram, nos mais diversos tópicos, como Teoria de Números, Análise Matemática, Mecânica, Música, etc. A Academia dispunha de um jornal científico, o *Commentarii* que, nos seus 20 anos de existência, publicou mais de 70 trabalhos de Euler.

Em 1733, casou com Katharina Gsell, de quem teve treze filhos (somente cinco sobreviveram à infância e só três aos progenitores).

Em 1735, Euler resolveu o problema de Basileia, o que lhe trouxe fama imediata. O nome do problema advém do facto de Basileia ser a terra natal de Euler, que o solucionou, bem como dos Bernoullis, que a ele também se dedicaram.

Este problema tem a ver com uma soma... com um número infinito de parcelas.

Por exemplo, se considerarmos a soma:

$$0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \ldots$$

Não é descabido que, no limite, isto é, quando se toma a soma com uma infinidade de parcelas, vamos obter algo como:

$$0{,}33333333333333333333\ldots$$

que reconhecemos como resultado de dividir 1 por 3. Dizemos então que a soma acima converge para 1/3.



A soma de que Euler calculou o valor era:

$$1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + 1/36 + \ldots$$

que se estende a todos os recíprocos dos quadrados perfeitos.

Para grande surpresa geral, Euler mostrou que

$$1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + 1/36 + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

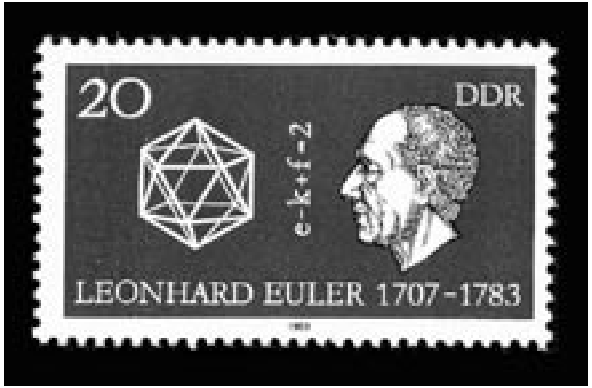
O aparecimento da constante $\pi$ neste contexto é surpreendente! (Sobre esta constante, ler o livro 6 desta colecção).

Durante a sua carreira, Euler maravilhou várias vezes o mundo matemático com o uso que fazia de somas infinitas, esses objectos estranhos cuja teoria rigorosa ainda estava distante.

Em 1736, Euler publica uma obra importantíssima de

Mecânica, em que aplica métodos inovadores, afastando-se do tratamento geométrico newtoniano. Neste ano, também resolveu o problema das pontes de Königsberg, de que nos ocuparemos mais à frente e que deu origem a uma nova área matemática, a Teoria de Grafos.

Em 1738, perde o uso do olho direito, em consequência de uma infecção. Neste mesmo ano, vence o prémio da Academia de Paris com um estudo sobre o fogo.




Selo da antiga RDA com a face de Euler e a sua fórmula para poliedros



A situação politicamente incerta na Rússia leva Euler a aceitar um convite de Frederico II e a mudar-se para a Academia Real da Prússia, em Berlim, em 1741. Aqui organiza a respectiva revista de investigação, *Miscellanea Berolinensia*, onde publica diversos trabalhos, apesar de continuar a colaborar com S. Petersburgo.

Nos 25 anos que viveu em Berlim, Euler escreveu perto de 400 artigos científicos, nos mais diversos domínios.

Tendo perdido o apoio de Frederico II, Euler regressa a S. Petersburgo em 1766. Pouco depois, uma catarata no olho esquerdo deixa-o praticamente cego. Surpreendentemente, isso não afecta a qualidade, nem a quantidade, da sua produção científica. Ditando os textos aos seus colaboradores, o génio não pára.

Euler morre em 1783, em S. Petersburgo, onde o seu corpo repousa. Nas palavras de um académico francês: "Euler cessou de calcular e de viver".

A Academia de S. Petersburgo continuou a publicar com regularidade os trabalhos de Euler por mais 50 anos, tal era o seu caudal criativo. E a produção de Euler não só trouxe Matemática, nova como trouxe muita da nomenclatura moderna. Vejamos alguns exemplos:

Quando uma variável depende de outra mediante uma expressão analítica, como y=2x (y é o dobro de x), dizemos que y é uma função de x. A notação que Euler escolheu, agora de utilização universal, é:

$$f(x) = 2x$$

Há uma constante muito importante em matemática que pode ser dada por várias expressões analíticas. Um exemplo dessas expressões é:

$$1 + 1/2! + 1/3! + 1/4! + 1/5! + \ldots$$

onde o ponto de exclamação, "!", se lê "factorial" e tem o seguinte significado: quando colocado após um número



inteiro, indica que se devem multiplicar todos os números naturais até ele. Por exemplo:

$$2! = 1x2 = 2$$
$$3! = 1x2x3 = 6$$
$$4! = 1x2x3x4 = 24$$

Esta soma tem um valor irracional (não se pode representar na forma de fracção):

$$1 + 1/2! + 1/3! + 1/4! + 1/5! + \ldots = 2{,}718281\ldots$$

Para nos referirmos a este número usamos a letra *e*, em qualquer parte do mundo. Foi Euler quem primeiro o fez.

O célebre $\pi$, razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência, também foi notação popularizada por Euler. Quando foi preciso operar com raízes de números negativos, Euler introduziu a notação *i* para a unidade imaginária, $\sqrt{-1}$.

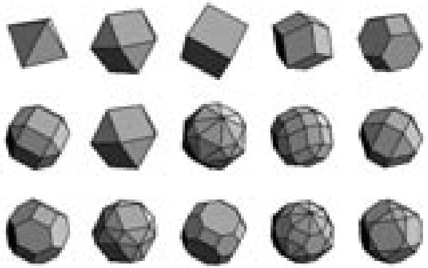

Nota bancária suíça,
em homenagem a Euler



# ALGUNS TÓPICOS DA OBRA DE LEONHARD EULER

Uma das fórmulas que todos aprendem, ou deveriam aprender, na escola, é a que relaciona os números de faces, arestas e vértices de um poliedro convexo. Esta é uma das que leva o nome de *Fórmula de Euler*.

Um poliedro é um sólido limitado por faces planas. Quando o plano de cada face deixa todo o sólido do mesmo lado, o poliedro diz-se convexo. São convexos os sólidos mais populares



Exemplos de poliedros convexos

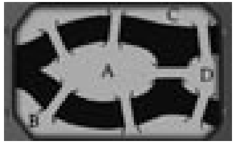
Para esta classe de sólidos, Euler descobriu, em 1750, a relação:

$$V + F = A + 2$$

onde V representa o número de vértices, A o de arestas e F o de faces. Por exemplo, num cubo temos 8 vértices, 12 arestas e 6 faces. Verifica-se a fórmula:

$$8 + 6 = 12 + 2$$

Em Königsberg, na Alemanha, o rio Pregel tem sete pontes que ligam as margens e duas ilhas. Os habitantes desta cidade interrogavam-se sobre a possibilidade de percorrer as sete pontes uma só vez, sem repetir nenhuma, visitando assim todas as terras firmes.

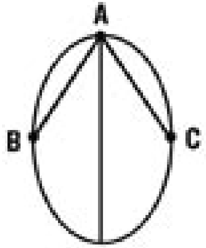



Esquema das pontes de Königsberg



Euler resolveu o problema com o seguinte raciocínio. Se se chega a uma terra por uma ponte, tem de se abandonar por outra, portanto haverá um número par de pontes em cada pedaço de terra firme. A não ser no local de partida e no de chegada de tal trajecto, onde haverá um número ímpar. Olhando para a figura, conclui-se que todas as quatro regiões são servidas por um número ímpar de pontes, portanto o problema é impossível.

Aqui nasceu a Teoria de Grafos, que se dedica a estudar esquemas compostos por pontos e linhas, como a seguinte estilização da situação de Königsberg.




Grafo de Königsberg

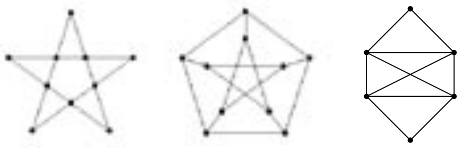
Um percurso num grafo que percorra todas as arestas exactamente uma vez diz-se euleriano. Euler mostrou que se o percurso for fechado (início coincidente com o fim) todos os vértices pertencem a um número par de arestas; se for aberto, exactamente dois vértices pertencem a um número ímpar de arestas. Este conceito corresponde a ser capaz de desenhar o grafo sem levantar o lápis e sem repetir nenhum segmento.

Por exemplo, o seguinte grafo é euleriano e as setas indicam como o percorrer:

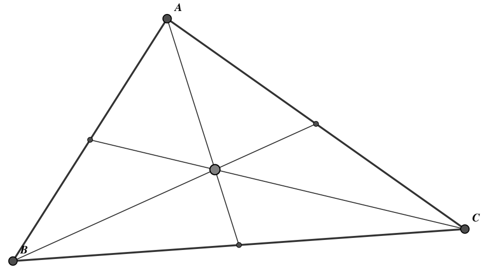
Um grafo euleriano



E estes, também serão eulerianos?



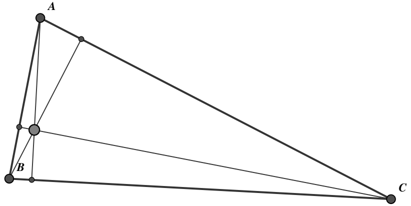
Euler descobriu que três pontos importantes associados a cada triângulo se encontram sempre alinhados. Vejamos que pontos são esses. Dado um triângulo ABC, se unirmos cada vértice ao ponto médio do lado oposto, reparamos que estes segmentos têm um ponto comum:




Baricentro

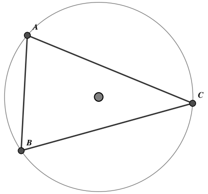
Este ponto, chamado baricentro, é o centro de massa do triângulo.

O nosso segundo ponto é o encontro das alturas do triângulo (uma altura é o segmento por um vértice perpendicular ao lado oposto):




Ortocentro

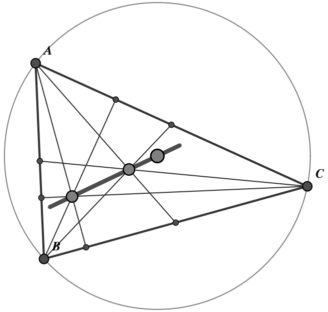
Finalmente, o terceiro é o centro da circunferência que contém os três vértices do triângulo:




Circuncentro

O que Euler provou foi que, em qualquer triângulo, estes três pontos estão na mesma recta. Recta essa que passou a ter nome próprio: *Recta de Euler*:






Recta de Euler

Uma das mais belas fórmulas de toda a matemática também tem a assinatura de Leonhard Euler.

$$e^{i\pi}+1=0$$

Fórmula de Euler

Nela ocorrem as mais importantes constantes da matemática: 0, 1, π, e, i. Todas relacionadas por uma igualdade simples.

Conta-se que Euler foi desafiado com o seguinte problema: *Suponhamos que seis regimentos fornecem seis ofi-*

*ciais de patentes diferentes. Por exemplo, um general, um coronel, um capitão, um major, um tenente e um alferes. Será possível colocar os oficiais numa disposição quadrangular seis por seis, para que em cada linha e cada coluna não haja nenhuma repetição de patente nem de regimento?'*

Para atacar este problema, Euler foi conduzido ao conceito de Quadrado Latino. Um quadrado latino é um arranjo quadrangular de $n^2$, objectos, onde cada linha e cada coluna contêm cada um dos n tipos diferentes.

Por exemplo,

| | | |
|---|---|---|
| A | B | C |
| C | A | B |
| B | C | A |

Quadrado latino 3x3

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | C | D | B |
| C | A | B | D |
| D | B | A | C |
| B | D | C | A |

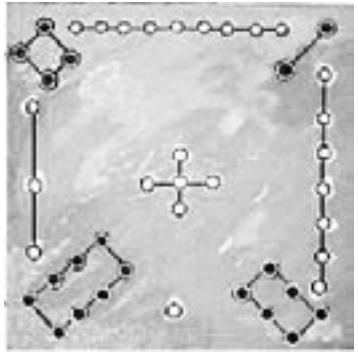
Quadrado latino 4x4



Os quadrados latinos são os antepassados remotos do popular *Sudoku*, onde se pretende construir um quadrado latino 9x9, usando os símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9, satisfazendo algumas condições suplementares.

O problema proposto a Euler não tem solução, mas conduziu à criação de conceitos matemáticos importantes.

# *QUADRADOS E HEXÁGONOS MÁGICOS*



Lo Shu

As lendas orientais têm sempre algo de mágico. Uma dessas lendas milenares aparece relatada num livro chinês chamado *Lo Shu* (Livro do Rio). Para acalmar o deus do rio Lo, causador de uma enorme inundação, as pessoas iniciaram uma prática de oferendas. No entanto, a táctica não resultava e a inundação continuava dramática. Cada vez que se praticava uma dádiva, aparecia uma tartaruga. Um dia, um rapaz notou que as marcas na carapaça da tartaruga pareciam representar os números de um a nove (ver figura inicial). Os números estavam arrumados de tal forma que cada linha horizontal, vertical e diagonal somava 15. As pessoas perceberam então que as ofertas não estavam a ser apresentadas na quantidade certa...

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

Configuração na carapaça da tartaruga do rio Lo

Desde aí o número de ocorrências de quadrados mágicos na cultura humana é bastante considerável. Um dos mais famosos é o do quadro *Melancolia I*, de Albrecht Dürer (1471-1528).

*Melancolia I*

Nesta obra de arte, podemos ver um quadrado mágico no canto superior direito:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

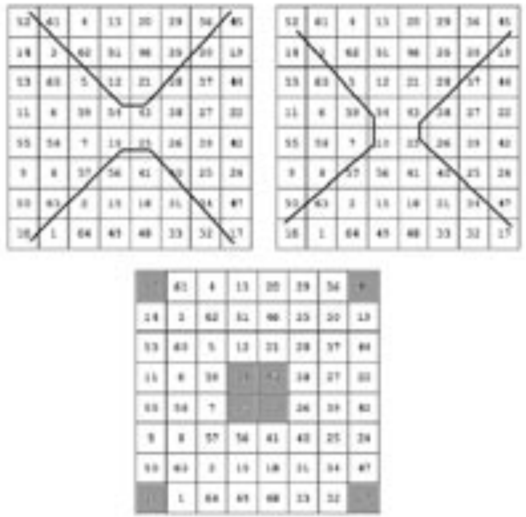


A soma constante deste quadrado é igual a 34. É usual chamar-se *soma mágica* à soma constante dos quadrados mágicos. O quadrado mágico de Dürer tem o detalhe adicional de ter inscrita nas células centrais da linha inferior a data de conclusão da obra – 1514.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 52 | 61 | 4 | 13 | 20 | 29 | 36 | 45 |
| 14 | 3 | 62 | 51 | 46 | 35 | 30 | 19 |
| 53 | 60 | 5 | 12 | 21 | 28 | 37 | 44 |
| 11 | 6 | 59 | 54 | 43 | 38 | 27 | 22 |
| 55 | 58 | 7 | 10 | 23 | 26 | 39 | 42 |
| 9 | 8 | 57 | 56 | 41 | 40 | 25 | 24 |
| 50 | 63 | 2 | 15 | 18 | 31 | 34 | 47 |
| 16 | 1 | 64 | 49 | 48 | 33 | 32 | 17 |

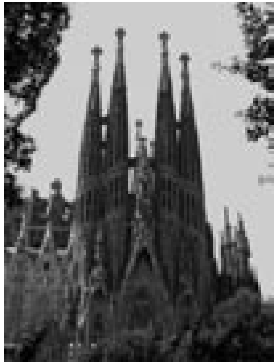
Outra construção curiosíssima deve-se a Benjamim Franklin. Este homem, muito conhecido, entre outras coisas, por ser o inventor do pára-raios, propôs a seguinte configuração:

O leitor pode verificar que este quadrado não é mágico, uma vez que, embora as somas na vertical e na horizontal sejam iguais a 260, as somas na diagonal não o são. No entanto, há outros padrões neste quadrado que somam 260:



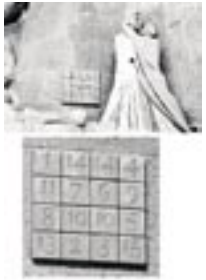
Se o leitor quiser ir dar um passeio até Barcelona, poderá visitar a monumental catedral da *Sagrada Família* da responsabilidade do arquitecto Antoni Gaudí (1852-1926).





Sagrada Família em Barcelona

Também nesta obra se pode encontrar um quadrado gravado na parede.



Quadrado gravado por Gaudí
na Sagrada Família

O leitor atento pensará que este não é um exemplo de um quadrado mágico, uma vez que aparecem números repetidos. A questão é que o quadrado foi construído para que a soma mágica seja igual a 33, suposta idade de Jesus Cristo na sua morte. Como veremos na secção seguinte, com os números de um a dezasseis, a soma mágica terá de ser igual a 34.

Mas não são só os quadrados o alvo de "magia" deste tipo. Já no século XX, Clifford W. Adams trabalhou sobre a possibilidade de conseguir configurações hexagonais com somas constantes. O *puzzle* deste número diz respeito a uma configuração hexagonal. De que forma se podem arrumar os números de um a dezanove numa configuração hexagonal para que a soma ao longo de uma coluna ou de uma diagonal seja sempre a mesma?

# *ALGUMA MATEMÁTICA DOS QUADRADOS E HEXÁGONOS MÁGICOS*

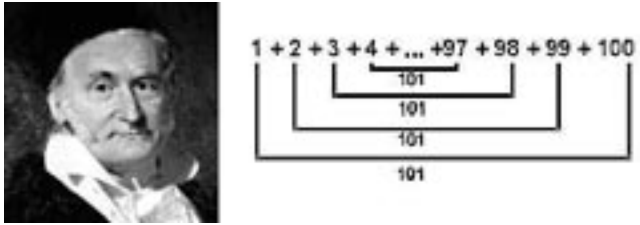
Exemplos importantes de sucessões numéricas são aquelas em que todos os termos (excluindo o primeiro) podem ser obtidos do anterior somando-lhe uma constante fixa. Por exemplo, 1, 5, 9, 13, 17,... é um desses casos. Neste exemplo, os termos são obtidos do anterior somando a constante 4. Estas sucessões chamam-se progressões aritméticas e a constante fixa chama-se razão da progressão aritmética.

Conta-se que o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) mostrou a sua enorme aptidão para os números, ainda em tenra idade, quando o seu professor o castigou, ordenando-lhe para somar os números naturais de 1 a 100. De facto, Gauss começou por pensar que a soma simples 1+100=101 tem o mesmo resultado que 2+99=101 (o que se acrescenta ao 1 retira-se ao 100) e que 3+98=101, etc. Sendo assim, teve apenas de verificar que existem 50 pares de elementos no conjunto {1,...,100} e, portanto, o cálculo pretendido corresponde a 50x101=5050. Esta ideia simples está na base da fórmula para a soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética. Para encontrar o valor da soma basta somar o primeiro e o último termo e, em seguida, multiplicar pelo número de pares:

$$S_n=(U_1+U_n)\times\frac{n}{2}$$

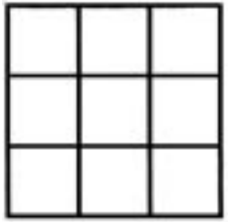
Por exemplo, se quisermos somar os 4 primeiros termos da sucessão 1, 5, 9, 13, 17, ..., basta efectuar o cálculo:

$$S_4=(1+13)\times\frac{4}{2}=28$$




CASTIGO DE GAUSS

Este episódio ajuda-nos a tirar algumas conclusões sobre as somas mágicas de quadrados e de hexágonos mágicos. Consideremos o quadrado 3x3:



Ao preencher este quadrado com números de um a nove, é inevitável que a soma total dos números no interior do mesmo seja igual a:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9$$

Aplicando o raciocínio de Gauss, podemos encontrar o resultado da soma fazendo o cálculo:

$$\text{Soma}=(1+9)\text{x}\frac{9}{2}=45$$



Uma vez que, para obter uma configuração "mágica", é necessário garantir que a soma de cada uma das três colunas dê o mesmo resultado, essa soma terá de ser igual ao resultado da divisão de 45 por 3. Repare o leitor que, mesmo sem começar a tentar arrumações, conseguimos argumentar que a soma mágica do quadrado de 3x3 tem de ser igual a 15. Ou seja, ou não existe quadrado mágico, ou se existir a soma mágica terá de ser igual a quinze. É claro que sabemos desde o livro Lo Shu que é possível conseguir o dito quadrado.

Partindo para a abstracção, podemos utilizar o mesmo argumento para qualquer quadrado *nxn*. Ao preencher o quadrado com números de 1 a $n^2$, a soma total será igual a:

$$1+2+3+...+n^2$$

Aplicando o raciocínio de Gauss, podemos encontrar o resultado desta soma fazendo o cálculo:

$$\text{Soma}=(1+n^2)\text{x}\frac{n^2}{2}=\frac{n^2+n^4}{2}$$

Para obter a configuração “mágica”, é necessário garantir que a soma de cada uma das $n$ colunas dê o mesmo resultado. Logo:

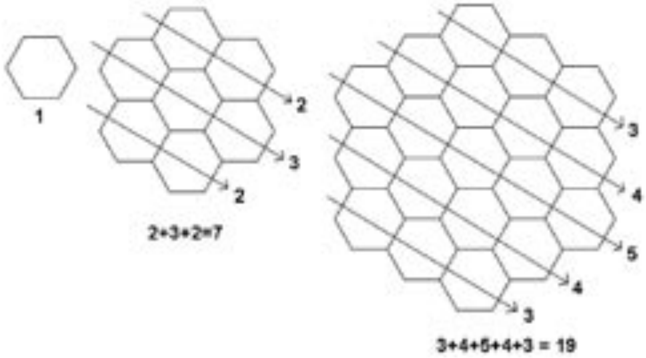
$$\text{Soma Mágica} = \frac{n^2+n^4}{2} \div n = \frac{n+n^3}{2}$$

Esta fórmula é muito importante, uma vez que esclarece à partida qual o valor da soma mágica. Por exemplo, no caso 4x4, a existir quadrado mágico, a soma terá de ser igual a:

$$\frac{4+4^3}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

Já vimos na obra de Dürer que o dito quadrado existe. Agora também é possível perceber a razão pela qual Gaudí teve de repetir números para conseguir somar 33.

Pode-se utilizar a mesma táctica para perceber o hexágono mágico. Em primeiro lugar, é preciso notar que já não é tão fácil determinar quantas células hexagonais existem num hexágono mágico. No caso de um quadrado $nxn$, o número de células é igual a $n^2$. No caso de um hexágono é necessário pensar mais elaboradamente. Comece-se por observar o seguinte esquema:



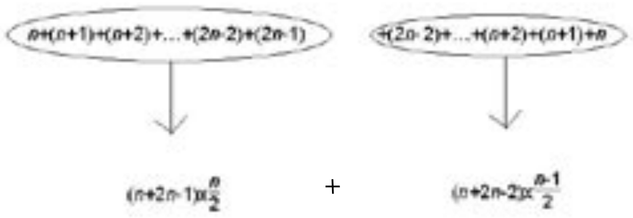

O número de células nas diagonais maiores corresponde à sucessão dos ímpares. No primeiro existe uma célula na diagonal maior, no segundo, três células, no terceiro, cinco células, etc. Para o hexágono $n$, existem $2n$-1 células na diagonal maior. O próximo hexágono (que já não aparece na figura) teria um número de células igual a:

$$4+5+6+7+6+5+4$$

Em geral, o $n$-ésimo hexágono tem um número de células igual a:

$$n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(2n-2)+(2n-1)+(2n-2)+\ldots+(n+2)+(n+1)+n$$

Podemos agora aplicar duas vezes o raciocínio de Gauss:




Feitas as contas, temos a fórmula seguinte para saber o número de células de um hexágono mágico:

Número de Células de um Hexágono Mágico = $3n(n-1)+1$



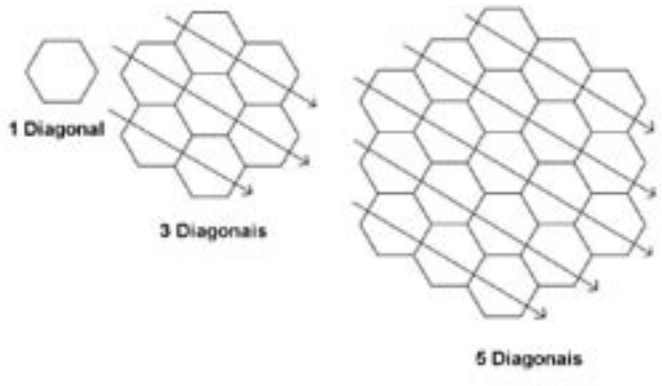
O leitor que tenha compreendido bem o raciocínio de Gauss poderá aplica-lo novamente para somar os números de 1 a $3n(n-1)+1$. O resultado irá dar:

Soma Total das Células de um Hexágono Mágico =

$$= \frac{(3n^2-3n+1)(3n^2-3n+2)}{2} =$$

$$= \frac{9(n^4-2n^3+2n^2-n)+2}{2}$$

Seguindo o processo utilizado para os quadrados, para obter a fórmula para a soma mágica, vamos dividir este valor pelo número de diagonais. Voltemos ao nosso esquema relativo à sucessão de hexágonos:




Sendo assim, temos a fórmula pretendida para a soma mágica:

$$\text{Soma Mágica} = \frac{9(n^4-2n^3+2n^2-n)+2}{2} \div (2n-1)$$

$$= \frac{9(n^4-2n^3+2n^2-n)+2}{2(2n-1)}$$



Usemos estas fórmulas para fazer uma pequena tabela:

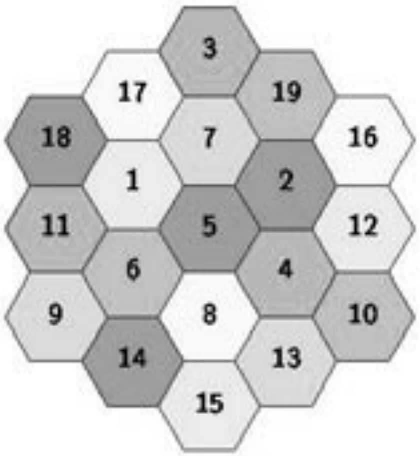
| Hexágono | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº de Células | 1 | 7 | 19 | 37 | 61 | 91 | 127 | 169 | 217 | 271 |
| Soma Total | 1 | 28 | 190 | 703 | 1891 | 4186 | 8128 | 14365 | 23653 | 36856 |
| Nº de Diagonais | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| Soma Mágica | 1 | 28/3 | 38 | 703/7 | 1891/9 | 4186/11 | 8128/13 | 2873/3 | 23653/17 | 36856/19 |

Ao olhar a tabela reparamos que os únicos hexágonos que têm uma soma mágica inteira correspondem a $n$=1 e $n$=3. De facto, pode-se reescrever fórmula da soma mágica da seguinte forma:

$$\text{Soma Mágica} = \frac{9(n^4-2n^3+2n^2-n)+2}{2(2n-1)}$$

$$= \frac{1}{32} \times \left(72n^3-108n^2+90n-27+\frac{5}{2n-1}\right)$$

Esta expressão só pode corresponder a um número inteiro se $\frac{5}{2n-1}$ for inteiro. Isso só acontece para *n=1* e *n=3*. O caso *n=1* corresponde ao trivial hexágono mágico com um hexágono com o número 1 no seu interior. O caso n=3 corresponde ao nosso *puzzle* de hoje. Uma configuração solução é a seguinte:




Outras configurações podem ser obtidas desta através de rotação ou de imagem espelhada.