Yy

Um (bom) problema (não) é (só)…[1]

Paulo Abrantes, *Faculdade de Ciências de Lisboa*

> *A resolução de problemas deve estar no centro do ensino e da aprendizagem da Matemática, em todos os níveis escolares. (APM, 1988, p. 30)*

Esta proposta, de colocar a resolução de problemas no primeiro plano da Matemática escolar, tem sido apresentada com insistência desde à alguns anos por algumas das mais prestigiadas figuras e associações da Educação Matemática - vejam-se por exemplo as recomendações do NCTM (1980).

O reconhecimento de que a resolução de problemas é afinal o motor do desenvolvimento da Matemática e da actividade matemática, e a perspectiva de que um papel de relevo deve ser-lhe destinado na aprendizagem, não são ideias novas. O famoso livro de George Pólya, *How To Solve It,* considerado como um marco de referência, foi publicado pela primeira vez em 1945[2]. De então para cá, centenas de obras dos mais diversos tipos têm sido dedicadas à resolução de problemas, para não falar dos clubes e dos concursos de problemas que, nalguns países, têm uma tradição de quase um século.

A verdade, porém, a que a Matemática escolar parece ter assumido sempre a resolução de problemas como uma actividade complementar, paralela, geralmente destinada a estimular ou detectar alunos particularmente dotados, por vezes associada a propósitos de popularização da Matemática ou de motivação externa para o seu estudo. A resolução de problemas nunca terá sido assumida como o centro em volta do qual se processaria a aprendizagem da Matemática, a não ser em projectos isolados ou em estudos experimentais de ponta.

Os actuais debates sobre a renovação curricular trazem de novo para o primeiro plano a necessidade de questionar o lugar da resolução de problemas. Em Portugal,

---

[1] Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática, 8,* 7-10 e 35.

[2] A primeira edição de *How To Solve It,* datada de 1945, é da Princeton University. Existe uma tradução em português, de 1977, intitulada *A arte de resolver problemas,* da Editora Interciência (Rio de Janeiro).

apesar de referências em momentos diversos[3], tem sido essencialmente na presente década que artigos, comunicações em encontros, propostas de trabalho e mesmo experiências concretas sobre a resolução de problemas têm surgido a um ritmo crescente. Estamos longe – e, afinal, *tão perto…* – das posições defendidas no início dos anos 80[4]. Hoje, podemos e devemos fazer um ponto da situação, analisar aquilo que se progrediu e aquilo que terá faltado.

Um pouco por todo o mundo, o relançamento de propostas de valorização do papel da resolução de problemas nos currículos de Matemática é acompanhado de um esforço no sentido de um *alargamento de perspectivas* sobre o que é um problema e sobre o que é a resolução de problemas (vejam-se, por exemplo, as propostas mais recentes do NCTM, 1987; e os documentos sobre a renovação do currículo de Matemática – APM, 1988). Parece pois importante reflectirmos sobre aquilo que é (e não é) um (bom) problema, à luz de critérios concretos.

Alguns exemplos

• Exemplo 0 (um *exercício):* Calcular o valor de $x^2 - 3x$ para $x=2$.

• Exemplo 1 (um *problema «de palavras»):* Um cliente comprou num dia 2,3 metros de fazenda. No dia seguinte, comprou mais 1.5 metros da mesma fazenda. Quantos metros de fazenda comprou no total?

• Exemplo 2 (um *problema «para equacionar»):* O João tem metade da idade do pai. Sabendo-se que a soma das duas idades é 72, quantos anos tem o João?

• Exemplo 3 (um *problema «para demonstrar»):* Usando os casos de semelhança, mostre que a altura relativa a hipotenusa divide um triângulo rectângulo em dois triângulos semelhantes.

• Exemplo 4 (um *problema «para descobrir»):* Usando apenas 6 fósforos, formar quatro triângulos equiláteros geometricamente iguais.

• Exemplo 5 (um *problema da vida real):* Construir uma planta de um estádio - um campo de futebol e uma pista de atletismo.

• Exemplo 6 (uma *situação problemática):* O produto de três números inteiros consecutivos é sempre um número par múltiplo de 3. Comentar a situação se substituirmos *produto* por *soma*.

[3] Por exemplo, o Compêndio de Algebra para os antigos 6.º e 7.º anos do liceu, da autoria de Sebastião e Silva e de Silva Paulo, na sua edição de 1958, incluia o livro clássico de Polya na bibliografia recomendade, o que curiosamente deixou de suceder em edições posteriores.

[4] Vejam-se, por exemplo: a proposta de realização de uma Olimpíadas da Matemática em Portugal (Duarte, Silva e Queiró – Inflexão n.º 2, 1981); uma comunicação sobre resolução de problemas (Ponte e Abrantes – Actas do Encontro «O Ensino da Matemática nos anos 80», 1982); uma comunicação sobre uma experiência concreta de resolução de problemas (Lopes, Matos e Mestre – idem).

• Exemplo 7 (uma *situação):* Considera uma página cheia de números:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
....	....	....	....

(APM, 1988, p. 47)

Problema versus exercício

O Exemplo (0) é uma questão idêntica a tantas outras que se propõem aos alunos do 7º ano após o estudo das operações em **Z**. Não se trata de um problema mas sim de um exercício, se considerarmos que:

> Um problema é uma situação que difere de um exercício pelo facto de o aluno não dispor de um procedimento ou algoritmo que conduzirá com certeza a uma solução. (Kantowski, 1981)

Esta definição mostra desde logo o carácter *relativo* da noção de problema. Assim, por exemplo, calcular a soma dos primeiros 100 números naturais será um exercício se o aluno conhece a fórmula da soma de *n* termos consecutivos de uma progressão aritmética mas poderá constituir um problema no caso contrário (uma situação idêntica costuma ser apresentada como revelação da capacidade matemática evidenciada por Gauss quando era ainda uma criança).

O valor educativo dos exercícios não será nulo mas é claramente limitado à prática de utilização de uma ou várias regras previamente conhecidas. Resolver muitos exercícios não contribui para desenvolver capacidades de raciocínio ou estratégias de resolução de problemas.

A tendência para não distinguir claramente um exercício de um problema corresponde a uma tradição bastante enraizada na Matemática escolar. Por vezes, estabelece-se uma distinção enganadora: no enunciado de um exercício haveria apenas números e operações enquanto o de um problema conteria alguma referência a um contexto concreto.

Os problemas de *palavras*

Questões como a do Exemplo (1) são muito frequentes no ensino primário tendo alegadamente a vantagem de atribuir um significado concreto às operações matemáticas.

No entanto, a excessiva repetição transforma rapidamente estes «word problems» (nome pelo qual são conhecidos na literatura inglesa) em *exercícios disfarçados* nos quais o «contexto» do enunciado acaba por ser irrelevante. O aluno procura munir-se de uns quantos *truques* que *funcionam* em várias situações – «este problema é de somar ou de multiplicar?» ou «…é de uma ou de duas operações?» ou «…é de pôr vírgula debaixo da vírgula?» – ou então entrega-se simplesmente a *fazer contas* com os dados numéricos até atingir um resultado «satisfatório» mesmo que este não tenha uma relação lógica com os dados (veja-se Moreira, 1987)

> A resolução de problemas deve ser um processo que envolva activamente os alunos na formulação de conjecturas, na investigação e exploração de ideias, que os leve a discutir e pôr em questão a sua própria maneira de pensar e também a dos outros, a validar resultados e a construir argumentos convincentes. Por isso mesmo, a resolução de problemas não acontece quando os alunos fazem uma página de cálculos, quando seguem o exemplo do cimo da página ou quando todos os problemas se destinam à prática do algoritmo apresentado nas páginas precedentes. (NCTM, 1987)

De certo modo, o papel destes problemas de palavras no ensino primário tem um correspondente noutros níveis de escolaridade…

O capítulo dos problemas…

Não é invulgar ouvirmos fazerem afirmações sobre os problemas revelando que estes não são encarados como algo inerente à própria natureza da Matemática mas vistos como se constituíssem apenas uma *secção* especial de um dos capítulos de álgebra do programa – das equações ou dos sistemas de equações. O grande peso habitualmente atribuído às equações e aos problemas «para equacionar», como o do Exemplo (2) atrás apresentado, contribui certamente para essa concepção. Escolher a incógnita, designá-la por x, resolver a equação – eis a estratégia!

Mas a estratégia é apenas uma de entre muitas que se podem ensaiar para resolver problemas e nem sempre será a mais apropriada. Também aqui, a excessiva repetição pouco ou nada acrescenta do ponto de vista da aprendizagem, sobre o que é a resolução de problemas. Muitas vezes, não se varia mais do que o grau de complexidade – «eu tenho o dobro da idade que tu tinhas quando eu tinha a idade que tu tens...»

Uma vez mais, o «contexto» do enunciado acaba por não desempenhar qualquer papel de relevo. Por isso é frequente o recurso ao formato de problemas «de idades» ou de «pensar em números». A partir de certa altura, propor aos alunos que inventem um problema que possa traduzir-se por uma dada equação deixa de ser um apelo à criatividade – «somando o dobro de um número a...»

Este tipo de problema terá, claro, algum valor educativo mas esse valor deve ser reduzido às suas devidas proporções.

> Infelizmente, reduz-se muitas vezes a prática de resolução de problemas à tradução de enunciados em equações numéricas com uma incógnita ou em sistemas de duas equações com duas incógnitas. É no entanto, muitos problemas – incluindo problemas algébricos – resolvem-se através de estratégias diferentes que envolvem actividades como: listar, organizar e classificar dados; usar uma tabela, um diagrama ou um modelo; trabalhar do fim para o princípio; eliminar casos; experimentar e verificar; procurar um padrão; resolver um problema mais simples ou o mesmo problema para cases particulares; generalizar uma solução; encontrar um contra-exemplo; resolver de várias maneiras diferentes; etc. (Abrantes, 1988, pág. 54)

Demonstrações e problemas

Uma demonstração pode constituir uma excelente actividade de resolução de problemas. Descobrir um caminho para provar uma conjectura ou uma proposição implica por vezes processos muito ricos que nem sempre estarão presentes noutros tipos de problemas. Esta perspectiva obriga-nos a fazer uma distinção: uma coisa é a descoberta do caminho e a argumentação; outra e a apresentação formal da demonstração. Não se discute aqui a importância relativa de uma e de outra mas chama-se a atenção para o facto de corresponderem a aspectos diferentes da actividade matemática e da aprendizagem.

Diz-se por vezes que terá havido nas últimas décadas um decréscimo muito acentuado na importância atribuída as demonstrações. Sem dúvida, nos antigos programas, a Geometria (então apresentada como um modelo de construção dedutiva) fornecia inúmeros exemplos de demonstrações. No entanto, do ponto de vista da resolução de problemas, aquela *conjectura* parece difícil de *provar*... Aprendia-se essencialmente *um formato de demonstração* que depois se repetia até à exaustão – e decorar ou reproduzir demonstrações não será uma actividade de resolução de problemas especialmente rica...

Seja como for, no ensino actual, as actividades de tipo demonstrativo estão praticamente limitadas a questões do tipo "utilizando... mostre que…", de que o Exemplo (3) constitui uma ilustração. Com muita frequência, caminhos inesperados para responder a questões desse tipo são desvalorizados, ou mesmo liminarmente rejeitados, o que mostra que a intenção não era descobrir um processo de provar uma proposição nova mas sim treinar a utilização de um dado teorema ou regra. A repetição e a pouca variedade vão acentuando o carácter de *exercício do tipo «mostre que»* que estas questões acabam por assumir.

Ao contrário, raramente se propõem aos alunos questões *em aberto*, conjecturas das quais não se sabe à partida se são verdadeiras ou não. A luta entre a procura de uma prova ou de um contra-exemplo é um aspecto da actividade matemática quase ignorado na escola (um exemplo de um problema deste tipo é discutido em Guimarães e Abrantes, 1988).

Na *vida real,* somos confrontados com problemas de que não podemos conhecer antecipadamente a solução e, muitas vezes, não sabemos mesmo se essa solução existe. Ora, este é um tipo de situação que deveria inspirar actividades de aprendizagem no âmbito da Matemática escolar.

Eureka!

Um tipo de problemas que são propostos em concursos ou noutras iniciativas não curriculares, com o objectivo de despertar a curiosidade e o gosto pela Matemática, e sugerido pelo Exemplo (4). Estes «puzzle problems» são apaixonantes para os *entusiastas* (que não se encontram obrigatoriamente entre os matemáticos...). A sua resolução requer quase sempre uma percepção súbita do caminho certo, uma *ideia luminosa.*

O seu interesse educativo parece óbvio. Mas é preciso não esquecer que estes problemas têm geralmente enunciados contendo toda a informação relevante (e não mais do que essa) e perante os quais o contexto raramente precisa de ser explorado. Alem disso, têm quase sempre uma solução única e bem determinada. Não são por isso especialmente *vocacionados* para discussões ou explorações em grupo sobre estratégias de resolução ou em torno da aplicação de modelos e métodos matemáticos.

Estes problemas são susceptíveis de interessar fortemente alguns alunos para os quais constituem um desafio intelectual, mas não têm *o mesmo efeito* sobre muitos outros alunos. Este facto, aliado as suas *características naturais* atrás apontadas, sugere que eles sejam encarados como uma fonte de actividades interessantes mas não como uma alternativa global à orientação da disciplina de Matemática.

Nos últimos anos, as recomendações para se dar relevo à resolução de problemas têm-se traduzido em iniciativas não curriculares, como «o problema da quinzena» o e os concursos de âmbito local ou nacional, mas não parecem influenciar o *essencial* – a forma como se ensina e aprende Matemática, o trabalho na sala de aula. Os problemas surgem assim como um factor de *motivação externa* para o estudo da Matemática e não como algo que é inerente ao trabalho em Matemática.

Contrariamente ao que seria desejável, são por vezes os *vícios* do ensino da Matemática que parecem *contaminar* aquelas iniciativas. Há pouco tempo, os critérios de classificação para as respostas a um dos problemas de um conhecido concurso de âmbito nacional reservavam uma grande parte da cotação para a «correcta designação das incógnitas» quando se tratava de um problema que se resolvia, de uma forma mais prática e mais inteligente, sem o recurso explícito a equações. Já não bastava que os problemas «para equacionar» tivessem exercido uma tão grande influência na forma de pensar em problemas de tantas gerações, nas quais nos devemos incluir nós próprios, os professores de Matemática... (um exemplo de um problema em que estratégias alternativas são mais simples do que a habitual resolução algébrica é discutido em Veloso, 1987).

Matematizar situações reais

A *matematização* de situações constitui, em diversas actividades profissionais, uma tarefa complexa para a qual são muitas vezes requeridos conhecimentos e alguma experiência. No entanto, é possível encontrar sugestões de trabalho desse tipo adequadas à Matemática escolar – como mostra o Exemplo (5). Abordar um problema como este implica: criar ou adaptar um modelo matemático da situação; aplicar diversos métodos matemáticos a esse modelo; verificar a sua validade perante a situação concreta.

A maneira «imprecisa» como o problema é enunciado não deve ser vista como uma fraqueza mas, pelo contrário, ela constitui uma forma *realista* de o apresentar. Aqui, é indispensável explorar o contexto do problema (incluindo os seus aspectos não matemáticos), obter informações que não são dadas à partida, formular com precisão *novos* problemas, proceder a algumas simplificações conscientes. Além disso, não existe uma solução única e as várias soluções aceitáveis nem sempre serão «rigorosas» mas sim aproximadas.

Classificar estes problemas como *problemas da vida real* não significa que eles tenham que abordar situações que surgem *obrigatoriamente* no dia-a-dia ou nas futuras profissões dos alunos. Usa-se aqui um critério ditado pela natureza do problema, das tarefas que se propõem aos alunos e das aptidões que estes poderão desenvolver.

Situações problemáticas

Propositadamente, o Exemplo (6) apresenta uma situação em que o contexto é a própria Matemática. A importância do contexto num problema não dependente do facto de ele se referir a alguma questão *prática*. Como vimos, sucede muitas vezes que exercícios disfarçados *falem* de questões concretas.

O que se passa aqui é que o contexto, não só precisa de ser explorado, como é em si mesmo problemático. Um dos aspectos da abordagem deste tipo de situações é a necessidade de formular um ou vários problemas. Não existe uma solução única, e o enunciado vago – «comentar a situação se...» – *convida* o aluno a gerar questões, fazer conjecturas e, eventualmente, prová-las.

De facto, formular problemas parece ser uma actividade essencial numa situação problemática – mas que é, temos que admiti-lo, bastante rara nas aulas de Matemática.

Ao discutir o que é uma situação problemática, um dos exemplos que Borasi (1986) apresenta (citando um livro de J. Adams) é particularmente interessante: «Tens trinta e muitos anos, as crianças vão bem na escola, o teu marido progride na sua carreira profissional, e tu estás aborrecida». O primeiro passo para uma solução, talvez o principal passo, consiste em *definir* correctamente o problema, o que pode ser feito de várias maneiras.

Situações (ainda) não problemáticas

Uma das formas de estimular actividades de resolução de problemas na sala de aula consiste em criar condições favoráveis, através de ambientes potencialmente ricos. Em situações como a do Exemplo (7) não está formulado qualquer problema, nem mesmo implicitamente, mas há um convite claro à *exploração* do contexto. E...

> Explorar tem aqui exactamente o sentido normal da palavra: entrar em terreno desconhecido, recolher dados, detectar diferenças, ser sensível às repetições e às analogias, reconhecer regularidades e padrões – ou porventura um sentido ainda mais forte – investigar, procurar encontrar, procurar descobrir. O espaço a explorar não é agora o Atlântico, mas por exemplo uma página cheia de números. (APM, 1988, p. 47)

Observações finais

Um modelo apresentado por Borasi (1986) para classificar diferentes tipos de problemas propõe a análise de quatro aspectos: (a) o contexto do problema; (b) a formulação; (c) a solução; (d) o método de abordagem. A tabela que se apresenta nesta página procura resumir a aplicação destes critérios aos oito exemplos atrás apresentados:

<table>
<tr><th>EX.</th><th>CONTEXTO</th><th>FORMULAÇÃO</th><th>SOLUÇÃO</th><th>MÉTODO</th></tr>
<tr><td>(0)</td><td>Inexistente</td><td rowspan="5">Explícita e fechada</td><td rowspan="5">Única e exacta</td><td rowspan="4">Uso de algoritmos previamente conhecidos …</td></tr>
<tr><td>(1)</td><td rowspan="5">Totalmente explícito no enunciado</td></tr>
<tr><td>(2)</td></tr>
<tr><td>(3)</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td>Insight</td></tr>
<tr><td>(5)</td><td>Implícita e aberta</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(6)</td><td>Só em parte no enunciado</td><td>Inexistente</td><td>Várias</td><td>Exploração do contexto
Criação de problemas..</td></tr>
</table>

Nas aulas de Matemática, predominam claramente questões idênticas às dos Exemplos (0), (1), (2) e (3). Nos concursos de problemas, encontram-se com alguma frequência questões do tipo do Exemplo (4).

Problemas e situações como aqueles que são ilustrados pelos exemplos (5), (6) e (7) são praticamente ignorados no Ensino da Matemática. No entanto, eles têm características únicas que não se encontram nos anteriores e a sua ausência torna a experiência matemática dos alunos consideravelmente limitada pouco significativa.

A definição de «bom problema» é uma noção relativa não só porque depende, como vimos, dos conhecimentos prévios de que o aluno dispõe mas também por outras razões de natureza educativa. Por um lado, é preciso que o aluno tenha interesse em resolvê-lo – como diz Pólya (1981), só há um problema quando há uma dificuldade que se *deseja* vencer ou contornar. Por outro lado, há que ter em conta a *variedade* das experiências de aprendizagem proporcionadas ao aluno.

A resolução de problemas consiste numa larga variedade de processos, actividades e experiências, e o Ensino da Matemática deveria reflectir essa diversidade. Por alguma razão, um documento recente do NCTM (1987) define problema como «uma *situação* na qual, para o indivíduo ou grupo a que se refere, uma ou mais estratégias têm ainda que ser desenvolvidas».

O alargamento de perspectivas sobre o que é um problema e a clarificação de ideias sobre o que é a resolução de problemas no contexto escolar são aspectos decisivos de uma imperiosa renovação do Ensino da Matemática. Proporcionar oportunidades aos alunos para resolverem, explorarem, investigarem e discutirem problemas, numa larga variedade de situações, é uma ideia-chave para a aprendizagem da Matemática constitua uma experiência positiva significativa.

Referências

Abrantes, P. (1988). *Viagem de ida e volta.* Lisboa: APM.

APM (1988). *A renovação do currículo de Matemática.* Lisboa: APM.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics. 17*(2), 125-141.

Guimarães, H., & Abrantes, P. (1988). Triângulos dourados. *Educação e Matemática 6,* 11-14.

Kantowski, M. G. (1981). Problen solving. In Fennema (Ed.), *Mathematics education research: Implications for the 80's* (pp. 111-126).

Moreira, L. (1987). A resolução de problemas. *Educação e Matemática 1,* 10-12.

NCTM (1980). *An agenda for action*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (1987). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery.* New York, NY: Wiley.

Veloso, E. (1987). Quantas maçãs tinha a Maria? *Educação e Matemática 2,* 5-8.

xx