

## Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização

Conceição Costa

*Escola Superior de Educação de Coimbra*

ccosta@esec.pt

Este texto, deverá ser entendido só como um conjunto de notas para reflexão, um olhar para o pensamento matemático avançado como parte do processo vivo do pensamento humano. De modo algum pretendo fazer uma cobertura exaustiva das questões que me proponho abordar. Uma primeira parte discute o que se entende pelo termo “pensamento matemático avançado”, algumas características do pensamento matemático avançado e como difere do elementar, e os processos mentais considerados subtis e complexos envolvidos no pensamento matemático avançado. Uma segunda parte deste artigo, refere processos mentais e modos de pensamento associados à visualização em certas tarefas geométricas propostas a crianças da escola elementar. Será procurada a interacção entre estes pensamentos e alguns processos mentais.

### **Pensamento matemático elementar e avançado**

#### **O termo “pensamento matemático avançado”**

Vou apresentar não uma definição do termo “pensamento matemático avançado” mas o sentido desse termo, segundo alguns educadores matemáticos. Procurarei assim identificar vários aspectos da natureza deste pensamento.

Dreyfus (1991) diz que o pensamento matemático avançado consiste numa grande série de processos que interagem entre si, como por exemplo os processos de representar, visualizar, generalizar, ou ainda outros tais como classificar, conjecturar, induzir, analisar sintetizar, abstrair ou formalizar.

Tall (1995) expressa que o pensamento matemático avançado, hoje, envolve usar estruturas cognitivas produzidas por um grande leque de actividades

matemáticas para construir novas ideias que continuam a construir e alargar um sistema sempre crescente de teoremas demonstrados. Acrescenta ainda que se pode aceitar como hipótese que, no indivíduo, o crescimento cognitivo do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado se faz partindo da “percepção de” objectos do mundo exterior e da “acção sobre” esses mesmos objectos e construindo estruturas de conhecimento então, segundo dois desenvolvimentos (caminhos) paralelos. Um destes desenvolvimentos vai de visual-espacial para o verbal-dedutivo; o outro é constituído por encapsulações sucessivas de processo-para-conceito, acompanhadas do uso de símbolos manipuláveis. E o uso destes dois desenvolvimentos chega a inspirar pensamento criativo baseado em objectos definidos formalmente e em prova sistemática. A figura 1 representa a ideia de Tall sobre os tipos de desenvolvimento matemático avançado.

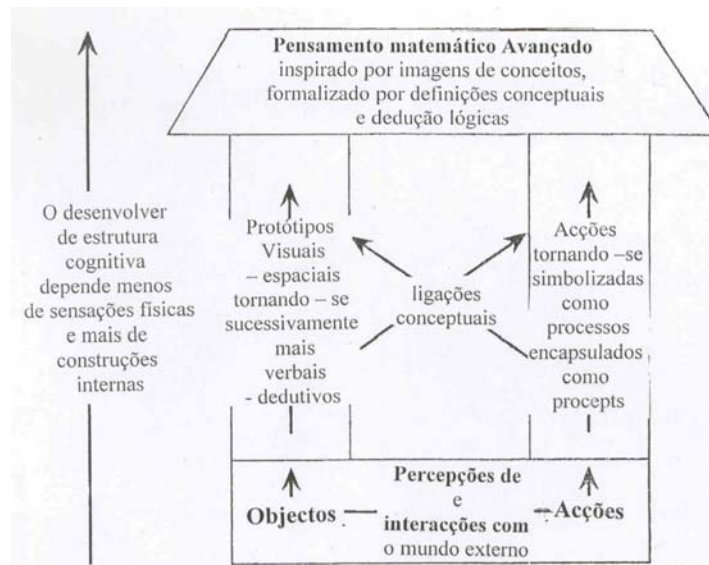


Figura 1. Esboço do desenvolvimento cognitivo da criança ao matemático investigador (Tall)

Gray (1999) diz que o termo “pensamento matemático avançado” tem sido usado mais no sentido do pensamento de matemáticos profissionais criativos quando imaginam, conjecturam e provam teoremas. Acrescenta ainda que esse termo também se aplica ao pensar dos estudantes a quem lhes foi apresentado definições e teoremas criados por outros e se lhes pede a construção dum conceito. As actividades cognitivas envolvidas no pensamento matemático avançado, diz Gray podem diferir grandemente de um indivíduo para outro, incluindo aqueles

que constróem de imagens e intuições à maneira de um Poincaré e aqueles outros, tal como um Hermite, mais logicamente orientados para a dedução simbólica. Os conhecimentos matemáticos obtidos, para estes estilos diferentes de pensamento matemático avançado, são muitos diferentes e enfrentam sequências diferentes de reconstrução cognitiva, embora ambos acabem na prova formal. Quando os estudantes estão envolvidos a usar as definições que lhes foram fornecidas, tentando dar significado, uns, podem criar estruturas formais poderosas apoiadas por uma variedade de imagética visual, cinestésica ou outra. Estes estudantes podem estar em conflito contínuo quando reconstroem a imagética informal para dar um significado rico à teoria formal. Outros estudantes podem concentrar-se antes na definição, usando-a e repetindo-a quando necessária até a escrever sem esforço, assim o foco está nas definições e nas deduções. Para este segundo tipo de estudantes, as imagens visuais e as intuições jogam um papel menos proeminente. Esta forma de abordagem pode produzir uma imagem formal do conceito capaz de usar as definições e provar teoremas quando se lhes é pedido.

Estas três ideias sobre pensamento matemático avançado parecem fazer transparecer diferentes significados, uma quer dar relevo à importância dos processos envolvidos e suas interações para a compreensão da Matemática avançada, outra tende a dar uma perspectiva da construção matemática do conhecimento humano e a outra refere-se aos tipos de actividade cognitiva que sustentam tal pensamento.

### **Características do pensamento matemático avançado e seu contraste com o pensamento matemático elementar**

Se no pensamento matemático avançado nos focarmos na definição de conceitos e o no ciclo completo de actividade em pensamento matemático, destacamos as palavras de Gray (1999) que aponta que em Matemática avançada, as definições dos conceitos são formuladas e os conceitos formais são construídos por dedução. Ou seja, para os conceitos matemáticos avançados são dadas propriedades como definições axiomáticas e a natureza do próprio conceito é construída estabelecendo as propriedades por dedução lógica. Os estudantes manejam o uso de definições do conceito de várias maneiras, ou reconstruindo as suas compreensões para chegar à teoria formal ou construindo por dedução, das definições do conceito, uma compreensão independente das formalidades.

Gray reforça que a Matemática avançada toma a noção de *propriedade* como fundamental, usando propriedades em definições de conceitos, dos quais é construída a teoria formal sistemática.

Relativamente ao ciclo completo de actividade em pensamento matemático avançado Tall, (1991) identifica-o desde o acto criativo de considerar um contexto

problema em pesquisa Matemática que conduz à formulação criativa de conjecturas até ao estágio final de refinamento e prova. Tall apela também para uma clara compreensão deste ciclo onde realça a necessidade para começar com conjecturas e debate, a necessidade para construir significado, para reflectir sobre definições formais, construir o objecto abstracto cujas propriedades são aquelas e só aquelas que podem ser deduzidas da definição.

*Estes aspectos diferem no pensamento elementar matemático?*

Tall (1991) postula que muitas das actividades que ocorrem no ciclo completo de actividade em pensamento matemático avançado também ocorre na resolução de problemas da Matemática elementar, mas a possibilidade de definição formal e dedução é um factor que distingue o pensamento matemático avançado. Gray (1999), referindo-se aos conceitos matemáticos elementares, diz que estes têm propriedades que podem ser determinadas actuando sobre eles, isto é as propriedades são manipuladas dos objectos, enquanto que os objectos em pensamento matemático avançado são criados de propriedades (axiomas).

*Onde está a transição do pensamento matemático elementar para o avançado?*

Van Hiele, citado em Schalkwijk e outros (2000), diz que não há nenhuma transição gradual dicotómica da Matemática elementar para a Matemática avançada, pois são níveis separados de pensamento, enquanto que David Tall (1991) distingue, dois níveis de Matemática: o nível elementar e o nível avançado. Ele diz que o movimentar do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado envolve uma transição significativa: a passagem do descrever para o definir, do convencer para o provar de uma maneira lógica baseada em definições. É a transição da coerência da Matemática elementar para a consequência da Matemática avançada, baseada em entidades abstractas que o indivíduo deve construir através das deduções das definições formais. Tall (1995) ainda acrescenta que a linha separadora entre o pensamento matemático avançado e o pensamento matemático elementar é aquela que localiza a mudança cognitiva ocorrida com a introdução do método axiomático, onde os objectos têm um estado cognitivo novo como conceitos definidos construídos de definições verbais. Também Gray (1999) referencia a transição para o pensamento matemático avançado, dizendo que o mover da construção objecto → definição para a construção definição → objecto é considerado uma parte essencial da transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado. Esta construção definição → objecto envolve seleccionar e usar critérios para as definições de objectos e isto pode inverter as experiências anteriores de relações e envolve uma transposição da estrutura do conhecimento.

*Há aspectos do pensamento matemático avançado que são específicos para a aprendizagem de matemática avançada?*

Robert e Schwarzenberger (1991) apontam que a pesquisa sobre características únicas que são específicas da aprendizagem de Matemática avançada não é conclusiva; muitas características propostas para a aprendizagem de Matemática avançada são vistas como mostrando uma forte continuidade da aprendizagem da Matemática das crianças mais jovens, contudo parece que, quando todas essas características são tomadas em conjunto, há uma mudança quantitativa: mais conceitos novos a ensinar em menos tempo, necessidade cada vez maior de capacidade de reflexão, maior capacidade de abstracção, menos problemas significativos, mais ênfase na prova, necessidade cada vez maior de uma aprendizagem versátil, maior necessidade de um controlo pessoal sobre a aprendizagem. A confusão provocada por definições novas coincide com a necessidade de um pensamento dedutivo mais abstracto. Estas mudanças quantitativas tomadas em conjunto geram uma mudança qualitativa que caracteriza a transição para o pensamento matemático avançado. Estudos sobre as capacidades dos estudantes manejarem as estruturas lógicas em particular a negação de frases envolvendo quantificadores (Barnard, 1995), foram pouco conclusivos na correlação do progresso na transição de uma visão descritiva da Matemática para uma de definição e dedução.

### **Processos mentais envolvidos no pensamento matemático avançado**

A natureza do pensamento matemático está inextricavelmente interligada aos processos cognitivos que dão origem ao conhecimento matemático. O pensamento matemático envolve diferentes processos de pensamento tal como é assinalado por Dreyfus (1991): processos envolvidos na representação de conceitos e de propriedades (o processo de representar-visualização, a mudança de representações e a tradução de uma formulação de um problema ou frase matemática para uma outra formulação, a modelação), processos envolvidos na abstracção (generalização e síntese são pré-requisitos básicos para a abstracção), processos que estabelecem relações entre o representar e o abstrair, e ainda processos que podem incluir entre outros a descoberta, a intuição, a verificação, a prova e a definição. Dreyfus (1991) expressa também que:

- Em muitos processos, relevantes para a compreensão da aprendizagem e do pensamento em Matemática, os seus aspectos matemáticos e psicológicos podem ser raramente separados entre si. Por exemplo, quando construímos um gráfico de uma função, nós executamos um processo matemático, seguindo certas regras que podem ser postas em linguagem matemática; ao mesmo tempo estamos provavelmente a gerar uma imagem mental visual desse

gráfico, isto é, nós estamos a visualizar a função numa forma que mais tarde nos ajudará a raciocinar sobre a função. As imagens mentais e as imagens matemáticas estão intimamente ligadas aqui. É precisamente esta ligação entre a Matemática e a Psicologia que tornam os processos interessantes e relevantes para a compreensão da aprendizagem e pensamento em Matemática avançada.

- Muitos dos processos mentais da Matemática avançada estão já presentes no pensamento das crianças sobre conceitos elementares da Matemática, por exemplo no número e valor de posição. Os processos mentais não são exclusivamente usados em Matemática avançada nem são exclusivamente usados na Matemática. Abstracções são feitas em física, representações são usadas em psicologia, análises são usadas em economia e visualização em arte.
- Uma característica que identifica o pensamento avançado do elementar é a complexidade e como ela é tratada; assim processos poderosos são aqueles que permitem gerir essa complexidade como a abstracção e a representação.

### **Visualização**

Vamos agora analisar o processo do pensamento matemático que intervém com mais incidência no estudo da geometria, aquilo que é normalmente designado por visualização. Visualização é um processo pelo qual as representações mentais ganham existência, diz Dreyfus (1991). Mariotti e Pesci (1994) chamam à visualização o pensar que é espontaneamente acompanhado e apoiado por imagens. Zimmermann e Cunningham (1991) dizem que a visualização está relacionada com os mais diversos ramos da Matemática e é multifacetada – com raízes na Matemática e com aspectos históricos, filosóficos, psicológicos, pedagógicos e tecnológicos importantes. Na literatura, definições e reflexões sobre visualização, evidenciam diferentes significados ligados quer à Matemática, à investigação científica, à Educação Matemática e à Psicologia. Porém communmente concordam que visualização se foca na percepção e na manipulação de imagens visuais. A par do termo “visualização” aparece normalmente definido o termo “pensamento visual” (Hershkowitz, e Parzys, e Dormolen, 1996; Mariotti, 1995; Senechal, 1991). Por exemplo, para Senechal “visualização” significa em linguagem popular “percepção espacial” e assim é a reconstrução mental da representação de objectos a 3 dimensões e “pensamento visual” é um termo mais lato e é o que fazemos quando reconhecemos rapidamente e manipulamos automaticamente símbolos de qualquer espécie. Mariotti (1995) induz a distinção entre visualização, a qual ela considera trazer à mente imagens de coisas visíveis, e pensamento visual, o pensar sobre coisas abstractas que originalmente podem não ser espaciais, mas podem ser

representadas na mente de alguma forma espacial. Tendo então presente a ambiguidade da palavra visualização, parece-nos fulcral tentar identificar e clarificar, tanto quanto possível, as maneiras de encarar o pensamento visual-espacial, os conceitos, processos, capacidades espaciais envolvidas nos aspectos visuais-espaciais do pensamento matemático.

## Modos de pensamento associados à visualização

### Processos mentais e modos de pensamento visual-espacial

Uma componente do pensamento matemático é o pensamento geométrico que envolve trabalhar sobre imagens quer estas sejam pensadas de experiências interiorizadas do mundo ou de construções mentais sobre ele (ATM,1982). Os matemáticos também se envolvem em raciocínio espacial não geométrico, em actividades como colorir mapas e trabalhar com nós, grafos, máquinas de estados finitas, etc. Estas componentes do pensamento matemático envolvem então o pensamento visual-espacial que defino como o conjunto de processos cognitivos para os quais as representações mentais para objectos espaciais ou visuais, relações e transformações podem ser construídas, manipuladas e codificadas em termos verbais ou mistas. Considero também o pensamento visual-espacial como um modo de pensamento que, segundo Clements (1981), é essencialmente não verbal, envolvendo representações internas que podem ser descritas como imagens de uma natureza muitas vezes visual e principalmente espacial.

Vamos tentar esboçar um modelo de pensamento visual-espacial (figura 2), distinguindo três modos diferentes: o pensamento visual-espacial resultante da percepção; o pensamento visual-espacial resultante da manipulação de imagens e construção de relações entre imagens; o pensamento visual-espacial que está ligado à transmissão e comunicação, representação isto é, à exteriorização do pensamento.

Modos de pensamento visual-espacial	Definição de cada modo de pensamento visual-espacial
Pensamento visual-espacial resultante da percepção (PVP), pensamento global.	Operações intelectuais sobre material perceptivo-sensorial, de memória.
Pensamento visual-espacial resultante da manipulação de imagens e da construção mental de relações entre imagens (PVM/PVR), pensamento dinâmico.	Operações intelectuais relacionadas com manipulação, transformações de ideias, conceitos e modelos.
Pensamento visual resultante da exteriorização do pensamento (PVE)	Operações intelectuais relacionadas com representação, tradução e comunicação de ideias, conceitos e métodos.

Figura 2. Modos de pensamento visual-espacial, respectivas definições.

O *pensamento visual-espacial resultante da percepção* (PVP) será o modo inicial (primário, mais próximo das sensações) do pensamento visual-espacial. O termo percepção aqui usado não significa só o que é recebido pelos sentidos (fundamentalmente a visão) sempre que estimulados pelo ambiente exterior, nem aquele termo que inclui qualquer tipo de conhecimento sobre um assunto do mundo exterior, mas sim uma referência activa da mente onde o registo do material estímulo não é passivo (Arnheim, 1969). O pensamento visual-espacial resultante da percepção poderá ser construído pelo sujeito partindo de sensações e utilizando a informação adquirida com a experiência. Este modo de pensamento visual-espacial envolve experiências de concentração mental, de controlo e experiências de observação. As experiências de observação envolvem percepção e interpretação são medições que dependem da experiência passada, de aspectos específicos da nossa cultura, portanto o que vemos, depende do que trazemos à situação. O modo de raciocínio visual-espacial resultante da percepção usa frequentemente um tipo de imagética que, segundo Brown e Presmeg (1993), inclui fundamentalmente imagens concretas, de memória e cinestésicas<sup>1</sup>. Os processos de pensamento envolvidos podem ser os que a figura 3 ilustra:

<b>Modo de pensamento visual-espacial</b>	<b>Processos mentais associados</b>
Pensamento visual-espacial resultante da percepção (PVP), pensamento global.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Intuições primárias</li> <li>- Construções de imagens</li> <li>- Re-apresentação de imagens</li> <li>- Reconhecimentos visuais</li> <li>- Interpretação</li> <li>- Identificação de objectos, modelos, formação de um "gestalt"</li> <li>- Apreensão global de uma representação geométrica</li> <li>- Memorização de uma exposição lógica</li> <li>- Geração de conceitos</li> <li>- Iterações</li> <li>- Primeiras inferências intuitivas</li> </ul>

Figura 3. Modo de pensamento visual espacial e processos mentais associados

*Pensamento visual-espacial resultante da manipulação de imagens e/ou da construção mental de relações entre imagens* (PVM-PVR). Este novo modo de pensamento visual-espacial liga-se fundamentalmente a transformar imagens visuais, executar manipulações mentais espaciais e a construir relações entre imagens visuais. Ainda, seguindo Brown e Presmeg (1993), as imagens visuais não são estáticas; assim os alunos usam imagética dinâmica e imagética padrão. A imagética dinâmica envolve a capacidade de mover ou transformar uma imagem



visual concreta. Imagética padrão é um tipo de imagética em que pormenores concretos são desprezados e puras relações são ilustradas num esquema visual-espacial. Johnson usou o termo “imagem-esquema” para descrever uma construção semelhante a imagética padrão, Presmeg (1992). Os processos mentais que podem estar presentes, neste modo de pensamento, são descritos na figura 4:

<b>Modo de pensamento visual-espacial</b>	<b>Processos mentais associados</b>
Pensamento visual-espacial resultante da manipulação de imagens e da construção mental de relações entre imagens (PVM/PVR), pensamento local, pensamento dinâmico.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Abstracção reflexiva</li> <li>- Intuições secundárias<sup>2</sup></li> <li>- Descoberta de relações entre imagens, propriedades, factos.</li> <li>- Transformações mentais</li> <li>- “Unitizing”<sup>3</sup></li> <li>- Planificações mentais</li> <li>- Verificação</li> <li>- Comparação</li> <li>- Criação de modelos</li> <li>- Reconstrução mental da visão de um objecto</li> <li>- Generalizações</li> <li>- Transferência</li> <li>- Previsão mental<sup>4</sup></li> </ul>

Figura 4. Modo de pensamento visual-espacial, e processos mentais associados

*Pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento (PVE).* Este modo de pensamento tem diferentes aspectos: está ligado ao processo pelo qual as representações mentais se exteriorizam, à comunicação e disseminação de ideias, à construção de argumentação, à descrição da dinâmica mental. Para comunicar as suas imagens, os alunos podem construir modelos, desenhos, figuras e gráficos (usando computador ou não) e usar descrições verbais. Este modo de pensamento visual-espacial confia fundamentalmente na linguagem. Os processos mentais que podem estar presentes neste modo de pensamento visual-espacial são os indicados na figura 5.

Os três modos de pensamento visual-espacial, que nos parece importante distinguir, podem por vezes suceder-se de forma linear, (no sentido que ao modo PVP se segue o modo designado por PVM/PVR, e depois a este sucede o modo PVE). O pensamento visual-espacial é um processo de andar de uns modos para outros de acordo com o esquema da figura 6. Nesse esquema os números de 1 a 6 querem representar possíveis interacções ou ligações entre os diferentes modos de pensamento visual-espacial. Por exemplo a ligação 2 quer dizer que o pensamento

<b>Modo de pensamento visual-espacial</b>	<b>Processos mentais associados</b>
Pensamento visual resultante da exteriorização do pensamento (PVE)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Acções, representação, ligações entre representações, modelos (desenhos, esboços, construções)</li> <li>- Codificação e decodificação por ex: tradução em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica.</li> <li>- Descrição da dinâmica mental</li> <li>- Construção de argumentação</li> <li>- Construção de conjecturas</li> <li>- Discussão de argumentação visual</li> </ul>

Figura 5. Modo de pensamento visual-espacial e processos mentais associados

visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento pode anteceder o pensamento visual-espacial resultante da percepção: por exemplo, quando construímos uma planta ou maquete, ou usamos material multibásico ou utilizamos um ambiente computacional, essas representações ou acções resultantes da exteriorização do pensamento podem facilitar a aquisição de um dado conceito ou estrutura. Outro exemplo: o par de ligações ou sequências (3,4) o qual quer designar que ao modo PVP pode suceder o modo designado por PVM/PVR e que a este modo de pensamento pode suceder o modo PVE: é o caso da situação em que interpretamos a linguagem dum figura geométrica, manipulamos as imagens mentais aí usadas, associamos com experiências anteriores, e traduzimos o resultado em informação verbal ou numa construção. O modelo de pensamento visual-espacial que estou a delinear usa dois mecanismos fulcrais para a construção de significado matemático: a imagética visual e as capacidades espaciais. A definição de imagética visual que vamos usar neste modelo visual-espacial, apoia-se na definição de Presmeg (1995) “esquema mental que ilustra informação visual ou espacial”. A imagética não está restrita à visão tradicional da figura na mente, inclui também formas vagas e mais abstractas de imagética. Vamos usar o termo “capacidades espaciais” no sentido de competências ensináveis com possibilidade de serem desenvolvidas dentro de cada indivíduo relacionadas com as tarefas que se executam no ambiente de sala de aula. Estas capacidades não dependem necessariamente do estágio de desenvolvimento de cada indivíduo.

### **Tarefas geométricas proposta a crianças da escola elementar e modos de pensamento visual-espacial**

Vou, com algumas tarefas geométricas propostas a alunos da escola elementar, tentar exemplificar algumas interacções ou ligações entre os diferentes

modos do pensamento visual-espacial, de acordo com o modelo acima descrito e que parecem estar presentes nas actividades dos respectivos alunos.

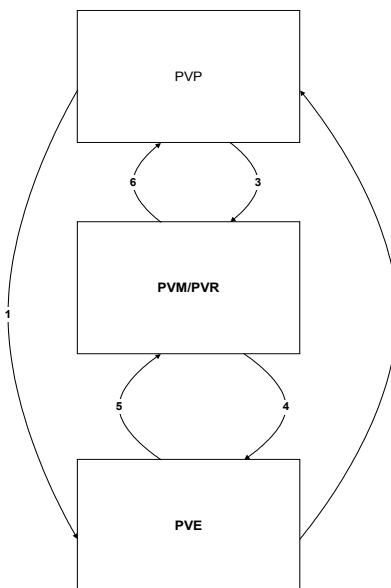


Figura 6. Modelo de pensamento visual-espacial

*Tarefas ligadas aos movimentos rígidos: virar, deslizar e rodar*

As tarefas que vou ilustrar, faziam parte de testes (pré e pós-teste) administrados a alunos do 4º ano do Ensino Básico num estudo que quer entender os modos do pensamento visual-espacial dos alunos no contexto da exploração e compreensão das transformações geométricas euclidianas, isometrias (translação, reflexão e rotação) através dos movimentos rígidos (virar, deslizar e rodar). O pós-teste foi passado, só quando esses alunos tinham sido sujeitos a um ambiente de ensino-aprendizagem informal que deu ênfase às transformações geométricas, usando materiais tecnológicos ou não. Ainda os testes (pré e pós) foram administrados aos alunos individualmente como de entrevistas se tratassem e registadas em vídeo. A primeira tarefa que vou ilustrar, designada por Tarefa V (figura 7), compreende duas partes em que com a segunda parte da tarefa, se tenta verificar o raciocínio que o aluno usou para responder à primeira parte da tarefa.

O aluno A(g) e a Tarefa V no pós teste:

I: Qual das 3 peças é a mesma que a de cima? Que te parece?

A(g):Esta (indicando a correcta).

I: Porquê?

- A(g): Se eu virar ao contrário (e roda o corpo e as mãos ). Isto aqui é a bola.
- I: Virar? É isso o que queres dizer? O que fazias à peça?
- A(g): Rodar uma volta.
- I: Uma volta ? Ficas no mesmo sítio.
- A(g): Um quarto de volta.
- I: Rodavas um quarto de volta, e depois?
- A(g): Rodava meia volta. A bolinha fica aqui e o quadradinho fica ali.
- I: Se pensares da mesma maneira, qual destas 3 é a mesma que a de cima?
- A(g): Esta, rodava meia volta. A bolinha fica aqui e o quadradinho... (vai apontando).
- I: Rodavas em torno de que ponto?
- A(g): Em torno deste (resposta certa).

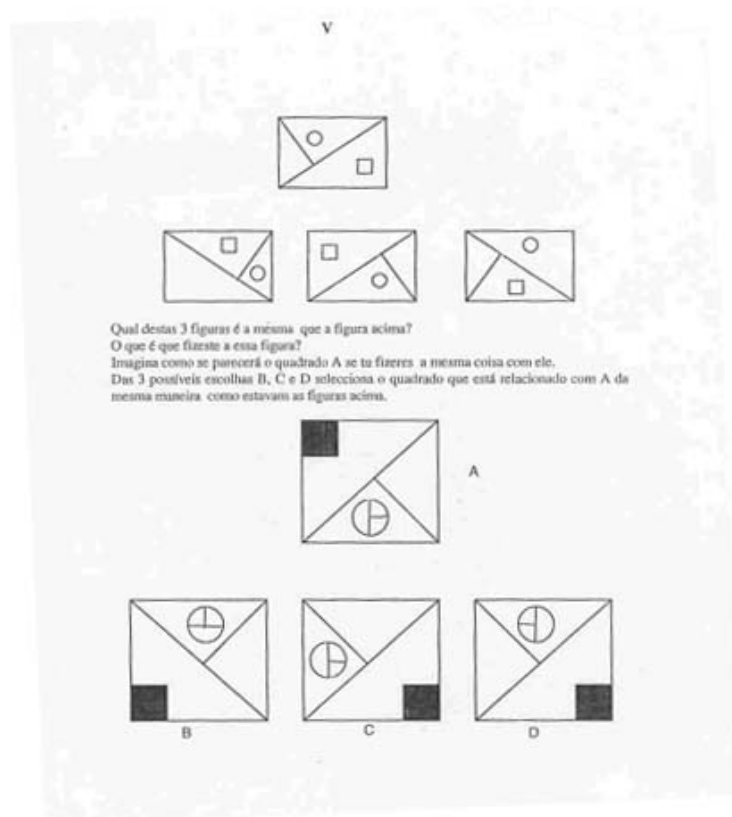


Figura 7. Tarefa V

Pelos gestos e verbalizações observados nas transcrições dos registos do aluno A(g), parece que o seu modo de raciocinar está próximo duma sequência (3,4) já referida: ao pensamento visual-espacial resultante da percepção segue o

pensamento visual-espacial resultante da manipulação de imagens e finalmente segue-se o pensamento visual-espacial resultante da exteriorização do pensamento através da descrição da sua dinâmica mental.

Uma outra tarefa feita pelos alunos, é a que vou designar por Tarefa II (figura 8), com a qual quero ilustrar que: “o aluno pode na sua forma de pensamento visual-espacial usar algumas vezes a relação (3,4) mas isso não significa que a não possa abandonar, quando encontra algum obstáculo”.

O aluno A(a), e a Tarefa II no pós-teste:

I: Com estas 4 peças, achas que podes fazer uma casa como esta?

A(a): Vou fazer de cabeça (ele tenta medir com os dedos). Acho que sim.

I: Como é que tu as punhas?

A(a): Punha esta cá em baixo, rodava esta de  $180^\circ$  e punha aqui. Também rodava esta de  $180^\circ$ . Aquela punha-a aqui encostada (ia apontado as peças). (Hesita... Está inseguro...). Se calhar não consigo.

I: Eu dou-te as peças. Se calhar tu tens razão.

A(a): (manipula as peças... ). Afinal não tenho razão. Não se pode fazer.

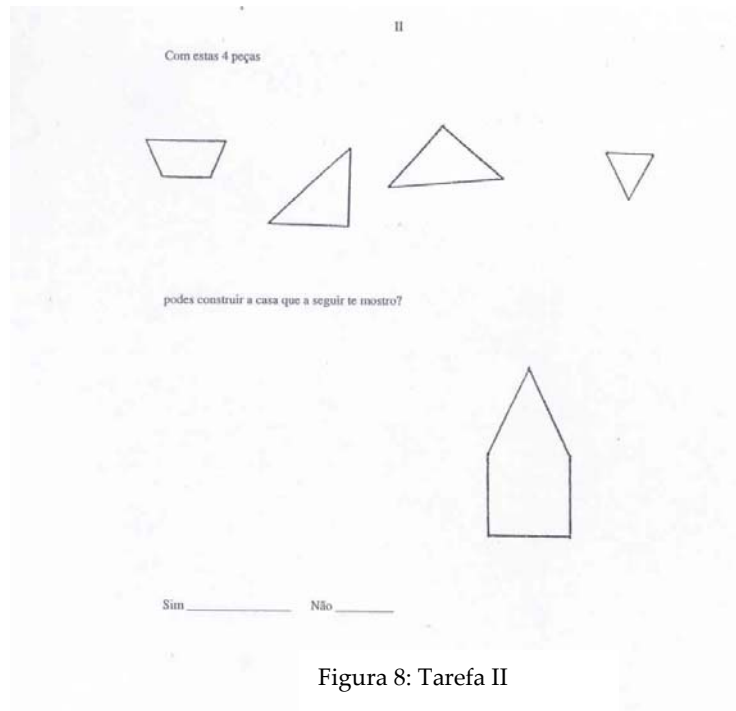


Figura 8: Tarefa II

Nesta tarefa, inicialmente, o aluno no seu modo de pensar usa uma sequência de modos de pensamento que designo por (3,4), mas essa forma de pensar é quebrada quando ele está a descrever a sua dinâmica mental, pois

encontra um obstáculo cognitivo. Depois parece surgir uma nova ligação entre modos de pensamento visual-espacial, a já designada ligação 2, quando por sugestão da investigadora e com a ajuda de manipulativos que lhe são fornecidos, o aluno tenta reproduzir a sua dinâmica mental. Acções resultantes da exteriorização do pensamento (PVE) tentam então facilitar a aquisição de uma certa estrutura geométrica (PVP) . Contudo o aluno não reavalia a sua dinâmica mental.

*Tarefa onde está presente o pensamento “proceitual”*

O professor mostrou o seguinte modelo de pirâmide (ver figura 9) à turma e perguntou: “Como a cartolina se parece antes de eu a dobrar para poder construir esta pirâmide?” O Frederico (8 anos) desenhou um quadrado e adicionou 3 triângulos aos seus lados (ver figura 10). Ele depois com as mãos dobra a pirâmide e diz, “há um buraco, não é?”

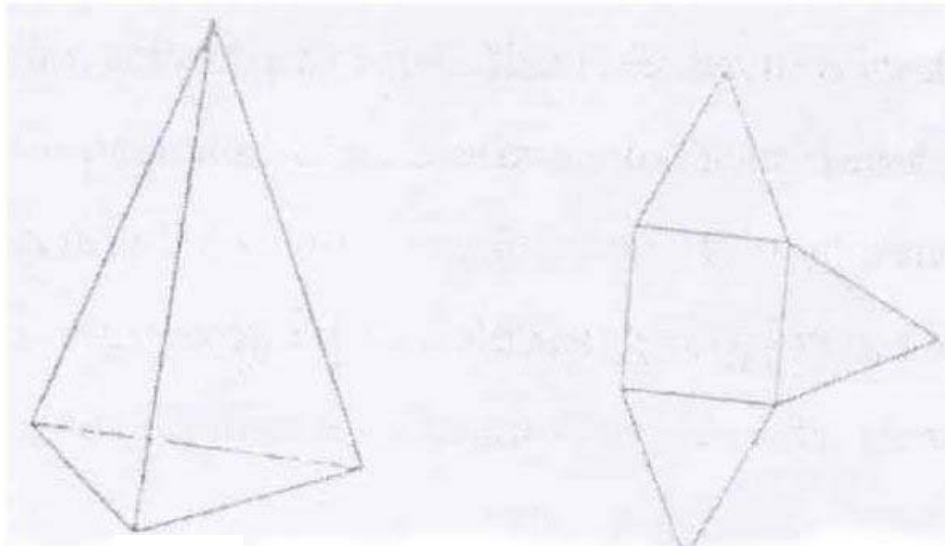


Figura 9.

Figura 10.

O aluno para resolver a tarefa proposta, começou por interpretar a linguagem da figura geométrica, depois manipulou as suas imagens mentais, representou através dum desenho a sua dinâmica mental e ainda reavalia essa mesma dinâmica mental. Assim, no seu modo de pensar visual-espacial, o aluno parece seguir o par de ligações (3,4) de modos de pensamento visual-espacial. A tarefa acima exibida, foi escolhida por Meissner e Pinkernell (2000) para mostrar uma situação de sala de aula onde as operações mentais visuais-espaciais não são a

parte dominante do raciocínio espacial, mas onde o pensamento proceptual “proceptual” parece estar presente, contrariando então Tall (1991) que defende que os conceitos geométricos avançados não resultam de encapsulamentos de procedimentos básicos, isto é que não há proceitos<sup>5</sup> em geometria. Meissner (2001) refere o proceito espacial “planificação” onde segundo ele o processo de “dobragem” foi encapsulado para o conceito estático de planificação. A “planificação” seria pois um proceito em raciocínio espacial. A própria “planificação” é o símbolo. Uma interpretação do símbolo é procedural “dobragem”.

As actividades exibidas pelos alunos aquando da execução das três tarefas acima apontadas, mostram certos tipos de interacções entre os três modos de pensamento visual-espacial, fundamentalmente o par de ligações designado por (3,4). Pode-se distinguir na forma como os alunos actuam, os 3 modos de pensamento visual-espacial por mim diferenciados, PVP, PVM/PVR e PVE em que ao modo PVP se seguiu o modo PVM/PVR e depois a este se sucedeu o modo PVE. Dos processos cognitivos que os alunos nos pareceram manifestar nas suas actividades para resolverem as respectivas tarefas realço: abstracção, transformações mentais e previsão mental. Esses processos são poderosos para gerir a complexidade do pensamento matemático. Se olharmos novamente para as actividades do aluno só na resolução da última tarefa mencionada neste artigo e, se as olharmos agora à luz do modelo do “pensamento proceptual” que processos cognitivos estariam presentes? Seriam os mesmos mencionados antes? Por exemplo, relativamente à abstracção, que aspectos específicos da abstracção poderiam ser reconhecidos ou valorizados? Que tipos de dificuldades os alunos têm quando têm de lidar com diferentes formas de abstracção. Como vamos saber que eles abstraíram? O modelo de pensamento visual-espacial sugerido, quando aplicado em diferentes contextos, poderá contribuir de algum modo, por exemplo, para averiguar diferentes formas de abstracção nos diferentes modos de pensamento? Seria fulcral que estes aspectos fossem tratados.

### Notas

<sup>1</sup> Imagética concreta pode ser pensada como “figura na mente”, mas não a mesma para todos; imagens de memória consideradas imagens de memória por fórmulas; imagens cinestésicas envolvem actividade muscular de algum tipo (Brown e Presmeg, 1993).

<sup>2</sup> Intuições que são desenvolvidas como resultado de uma formação sistemática (Fischbein citado em Tall, 1991).

<sup>3</sup> Operação mental identificada como base de muita actividade matemática tanto geométrica como numérica e consiste em construir e coordenar unidades abstractas.

<sup>4</sup> É a tradução de *mental enactment*, expressão usada por Simon (1996) que se quer referir a um conjunto de operações mentais que permitem antecipar as transformações dos objectos e o conjunto dos resultados dessas operações.

<sup>5</sup> Proceito elementar é uma amalgama de 3 componentes: um *processo* que produz um *objecto* matemático e um *símbolo* que é usado para representar tanto o processo como um objecto, Tall, (1991). Por exemplo o termo “3+4” representa o número 7 em forma de soma. Representa também o processo de adicionar 4 a 3. Assim “3+4” representa tanto um conceito como um processo, daí o chamarem de proceito.

### Referências

- Arnheim, R. (1969). *Visual thinking*. London: University of California Press.
- ATM (1982). *Geometric images*. Devon: ATM.
- Barnard, T. (1995). The impact of “meaning” on students’ ability to negate statements. In *Proceedings of 19<sup>th</sup> International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 3-10). Recife, Brasil
- Brown, D., & Presmeg, N. (1993). Types of imagery used by elementary and secondary school students in a mathematical reasoning. In *Proceedings of 17<sup>th</sup> International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 137-144). Tsukuba, Japão.
- Clements, K. (1981). Visual imagery and school mathematics. In *Proceedings of 5<sup>th</sup> Annual Conference of MERGA* (pp. 21-24). Adelaide, Austrália.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In David Tall (Org.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25–41). Dordrecht: Kluwer.
- Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In *Proceedings of 15<sup>th</sup> International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 33-48). Assis, Itália.
- Dreyfus, T. (1995). Imagery for diagrams. In R. Sutherland & J. Mason (Orgs), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 3-17). New York, NY: Springer.
- Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 111-133.
- Hershkowitz, R., Parzysz, B., & Dormolen, J. (1996). Space and shape. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Orgs), *International handbook of mathematics education* (pp. 161-204). Dordrecht: Kluwer.
- Mariotti, A., & Pesci, A. (1994). Visualization in teaching-learning situations. In *Proceedings of 18<sup>th</sup> International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 22). Lisboa.



- Mariotti, A. (1995). Images and concepts in geometrical reasoning. In R. Sutherland & J. Mason (Orgs) *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 97-116). New York, NY: Springer.
- Meissner, H. (2001). Encapsulations of a process in geometry. In *Proceedings of 26<sup>th</sup> International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 359-366). Utrecht, Holanda.
- Meissner, H., & Pinkernell, G. (2000). Spatial abilities in primary schools. In *Proceedings of 25<sup>th</sup> International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3., pp. 287-294). Hiroshima, Japão.
- Presmeg, N. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 595-610.
- Presmeg, N. (1995). Preference for visual methods: an international study. In *Proceedings of 19<sup>th</sup> International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 58-65), Recife, Brasil.
- Robert, A., & Schwarzenberger, R. (1991). Research into teaching and learning. In D. Tall (Org.), *Advanced mathematical thinking* (pp 125-139). Dordrecht: Kluwer.
- Schalkwijk, L., Bergen, T., & Roolj, A. (2000). Learning to prove by investigations: a promising approach in Dutch secondary education. *Educational Studies in Mathematics*, 43, 293-311.
- Senechal, M. (1991). Visualization and visual thinking. In J. Malkevitch (Org.), *Geometry's future* (pp. 15-21). USA: COMAP.
- Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Org.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer.
- Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In *Proceedings of 19<sup>th</sup> International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 1, pp. 61-75). Recife, Brasil.
- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editors' introduction: What is mathematical visualization. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Orgs), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 1-7). Washington, DC: Mathematics Association of America.